

THESE DE DOCTORAT D'ETAT ES SCIENCES MATHEMATIQUES

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES

de PARIS

par

BARBEN-JEAN COFFI-NKETSIA

pour obtenir

le grade de Docteur Es-Sciences

Sujet de la Thèse : Valuation des anneaux à l'aide des demi-groupes
totalement ordonnés avec zéro.

soutenue le Novembre 1970

devant la Commission d'Examen

MM. M. KRASNER	Président
J. DIXMIER	Examineur
M. GUILLAUME	Examineur
A. NERON	Examineur

THESE DE DOCTORAT D'ETAT ES SCIENCES MATHÉMATIQUES

présentée

A LA FACULTE DES SCIENCES

de PARIS

par

BARBEN-JEAN COFFI-NKETSIA

pour obtenir

le grade de Docteur Es-Sciences

Sujet de la Thèse : Valuation des anneaux à l'aide des demi-groupes
totalement ordonnés avec zéro.

soutenue le Novembre 1970

devant la Commission d'Examen

MM. M. KRASNER	Président
J. DIXMIER	Examineur
M. GUILLAUME	Examineur
A. NERON	Examineur

Qu'il me soit permis d'exprimer ici ma profonde gratitude à Monsieur le Professeur KRASNER. Il a bien voulu me guider d'un bout à l'autre de mon travail et y apporter de nombreuses améliorations.

Je suis reconnaissant à Monsieur le Professeur BLANC de la confiance qu'il m'a toujours témoignée. Sans le parrainage bienveillant auprès du C.N.R.S., dont lui-même et Monsieur le Professeur KRASNER m'ont honoré, ce travail n'aurait pas vu le jour.

Je remercie très vivement Monsieur le Professeur NERON d'avoir accepté d'examiner mon travail. Ses intéressantes suggestions m'ont beaucoup apporté.

Je remercie Monsieur le Professeur DIXMIER d'avoir accepté de me proposer un second sujet.

Je tiens à exprimer ma reconnaissance

à Monsieur le Professeur GUILLAUME pour son soutien amical et ses bons conseils lors de l'achèvement de ce travail

à Monsieur le Professeur SAMUEL dont les cours et séminaires prodigués à la Faculté des Sciences de CLERMONT-FERRAND m'ont appris à aimer l'algèbre. Ses encouragements pendant l'élaboration de ce travail m'ont été précieux.

Je remercie les enseignants du Département de mathématiques pures de la Faculté des Sciences de CLERMONT-FERRAND dont l'appui m'a permis de travailler dans de bonnes conditions.

Je remercie Madame CHAUNIER et le personnel du secrétariat de ce Département, Monsieur ACHARD et le personnel de l'atelier d'imprimerie de la Faculté des Sciences de CLERMONT-FERRAND pour l'attention qu'ils ont apportée à l'impression de ma thèse.



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41550207_0025

TABLE DES MATIERES

Chapitre I

Valuation des anneaux avec diviseur de 0.
Propriétés des anneaux valuables et critère de valuabilité.

(1.1) Anneaux valuables	
(1.2) Premières propriétés des anneaux valuables.....	3
(1.3) Critère de valuabilité.....	4
(1.4) Comparaison de valuations.....	9

Chapitre II

Structure des anneaux valuables.

(2.1) L'ensemble des diviseurs de 0.....	12
(2.2) Quelques résultats.....	14

Chapitre III

Anneaux nilmoniques et quasi-nilmoniques.

(3.1) Définition.....	17
(3.2) Systèmes de générateurs de certains anneaux nilmoniques et quasi-nilmoniques.....	23
(3.3) Monômes limites et générateurs d'un V-idéal. Un cas particulier.....	27

Chapitre IV

Sous-ensembles particuliers de N^s ($2 \leq s < +\infty$) liés aux V-idéaux.

(4.1) Sous-ensembles de N^s ($2 \leq s < +\infty$) de type ML de prévaluation.....	
(4.2) Familles caractéristiques, co-familles caractéristiques et bi-familles caractéristiques dans N^s ($2 \leq s < +\infty$).....	48
(4.3) Etude des familles caractéristiques dans N^s de valeurs de base (n_t , $1 \leq t \leq s$, $n_s \geq 1$) - (Recherche de certains de leurs invariants)...	52

Chapitre V

Hypersurfaces indéfinies limites dans Z^s ($2 \leq s < +\infty$).

(5.1) Généralités.....	59
(5.2) Le groupe ordonné $\mathcal{C}_E$ (défini par une hypersurface indéfinie limite)...	63
(5.3) Etude des ensembles de points de R^s	68

(5.4) Sous-ensembles réguliers dans N^S	80
(5.5) Compléments sur les sous-ensembles de R^S	85
(5.6) Partitions régulières de Z^S	90
(5.7) Demi-drapeaux dans R^S . Applications	102

Chapitre VI

Caractérisation explicite des hypersurfaces
indéfinies limites de préévaluation dans Z^2 à partir de leurs invariants.

(6.1) Généralités	114
(6.2) Fractions négacontinues et leurs applications	125
(6.3) Courbes particulières de R^S	140
(6.4) Autres applications des fractions négacontinues	167

Chapitre VII

Caractérisation explicite des sous-ensembles
de type ML de préévaluation dans N^2 .

Invariants associés.

(7.1) Caractérisation géométrique	189
(7.2) Sous-ensembles de type ML indéfiniment prolongeables	192
(7.3) Représentation et propriétés des sous-ensembles E de N^2 de type ML de préévaluation	196

Chapitre VIII

Caractérisation plus explicite des hypersurfaces indéfinies limites de préévaluation dans Z^s ($s \geq 3$)	209
---	-----

Chapitre IX

Prévaluations et ordres séparateurs
des anneaux nilmoniques préévaluables

(9.1) Préévaluation ; définition	220
(9.2) Ordre séparateur ; définition et application	221
(9.3) Un contre-exemple	225
(9.4) Quelques remarques	241

INTRODUCTION

La notion habituelle de valuation, dont les valeurs pour les éléments non-nuls d'un anneau A sont prises dans un groupe multiplicatif totalement ordonné Γ , ne peut s'appliquer (même si Γ n'est pas supposé commutatif) qu'aux anneaux A sans diviseur de 0. En effet, si $v : A \rightarrow \Gamma \cup \{0\}$ est une telle valuation et si $a, b \in A$ sont tels que $a \neq 0$, $b \neq 0$ et $ab = 0$, on aura $v(a) \in \Gamma$, $v(b) \in \Gamma$, donc $v(0) = v(ab) = v(a)v(b) \in \Gamma$ et, par conséquent, $v(0) \neq 0$, ce qui est absurde. Dès lors, si l'on veut définir les valuations des anneaux plus généraux, il est naturel de considérer des valuations moins restrictives, dont les valeurs sont prises dans un demi-groupe multiplicatif totalement ordonné D (c'est-à-dire muni d'un ordre total $<$ tel que, si $\alpha, \beta, \gamma \in D$, $\alpha < \beta$ implique $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$ et $\alpha\gamma \leq \beta\gamma$), auquel on impose simplement la condition (nécessaire pour formuler les axiomes pour que v soit une valuation) de posséder un élément 0 (dit zéro), qui est à la fois bilatéralement absorbant dans D ($0D = D0 = \{0\}$) et le plus petit élément de D . Afin d'éviter des complications sans intérêt, on supposera, en plus (sauf dans quelques remarques), que D est commutatif. Si A est un anneau et si D est un tel demi-groupe, on appelle valuation de A à valeurs dans D , toute application $v : A \rightarrow D$ telle que :

- 1° $v(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$
- 2° $v(ab) = v(a)v(b)$
- 3° $v(a+b) \leq \max(v(a), v(b))$
- 4° $v(-a) = v(a)$

quels que soient $a, b \in A$.

L'anneau A étant donné, le premier problème qui se pose est celui de l'existence des valuations de A de cette forme plus générale (si une telle valuation existe, l'anneau A sera dit valuable). Ce problème n'est pas trivial, car il est facile de donner des exemples d'anneaux qui ne sont pas valubles.

[En effet, soit $A = k[X, Y] / (X^2, Y^2)$, où k est un corps et (X^2, Y^2) est

l'idéal engendré dans $k[X, Y]$ par X^2, Y^2 . Si $f(X, Y) \in k[X, Y]$, posons

$\overline{f(X, Y)} = f(X, Y) + \mathfrak{J} \in A$. On a $\overline{XY} \neq \overline{0}$ tandis que $\overline{X^2} = \overline{X^2} = \overline{0}$ et $\overline{Y^2} = \overline{Y^2} = \overline{0}$.

Supposons qu'il existe une valuation v de A à valeurs dans un demi-groupe

multiplicatif totalement ordonné D avec zéro (noté 0_D). On aurait

$$v(\bar{X}) \leq \max[v(\bar{X}), v(\bar{Y})], \quad v(\bar{Y}) \leq \max[v(\bar{X}), v(\bar{Y})], \quad v(\bar{X})^2 = v(\bar{Y})^2 = 0_D, \quad v(\bar{X}\bar{Y}) \neq 0_D.$$

Donc $0_D = \max[v(\bar{X})^2, v(\bar{Y})^2] = \left(\max[v(\bar{X}), v(\bar{Y})] \right)^2 \geq v(\bar{X})v(\bar{Y}) = v(\bar{X}\bar{Y}) > 0_D$, ce qui est absurde.]

La réponse à ce problème est donnée par le résultat suivant :

Théorème de valuabilité. Soient $N_g(a) = \{x \in A ; xa = 0\}$ et $N_d(a) = \{x \in A ; ax = 0\}$

les annulateurs à gauche, respectivement à droite de $a \in A$. Alors A est valable si, et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites.

I) Pour tout $a \in A$, on a $N_g(a) = N_d(a)$ [cet ensemble sera noté $N(a)$]

II) Quels que soient a et b dans A , on a $N(ab) = N(ba)$

III) La famille $\mathfrak{N} = \{N(a) ; a \in A\}$ est totalement ordonnée par inclusion [(1.3.1)].

En outre, si les conditions précédentes sont satisfaites, on peut construire effectivement à partir de $\mathfrak{N}$ (et de la structure d'anneau de A) une valuation de A , dite sa valuation minimale, qui est la moins fine parmi toutes les valuations de A à valeurs dans un demi-groupe multiplicatif commutatif totalement ordonné avec zéro (cette valuation est l'analogue de la valuation triviale des anneaux sans diviseur de 0 avec laquelle elle coïncide, dans ce cas, à un isomorphisme de D près).

Les conditions I) et II) sont automatiquement satisfaites si A est commutatif. La condition I) peut se formuler comme suit : quels que soient $a, b \in A$, $ab = 0$ implique $ba = 0$. Si cette condition est satisfaite, la seule condition III) est nécessaire et suffisante pour que A soit valable, mais pas forcément à l'aide d'un demi-groupe commutatif.

Le mathématicien soviétique Iak Khion s'est posé, antérieurement au présent travail, la question de valuabilité des anneaux à l'aide de demi-groupes (Izvestija Akademii Nauk. SSSR Serija Matematicheskaja 1957 - Tome 21 p. 311-328); mais il n'avait pas supposé que ces demi-groupes sont commutatifs. Cette approche trop générale l'a empêché de remarquer qu'il fallait, pour obtenir un critère de valuabilité non-trivial, se limiter aux anneaux satisfaisant à la condition I). Ainsi, ses résultats n'interfèrent qu'avec quelques premières pages du présent travail.

Le théorème de valuabilité acquis, il est naturel de chercher à l'appliquer à des classes particulières d'anneaux en vue d'obtenir, sous forme aussi explicite que possible, la caractérisation des anneaux des classes considérées qui sont valuables.

Comme le quotient d'un anneau valable par son nil-radical est sans diviseur de 0, tout anneau sans nil-radical est trivial du point de vue du problème de valuabilité. Ainsi on envisage la classe des anneaux commutatifs unitaires qui semble la plus simple possible, celle des anneaux nilmoniques. On appelle nilmonique tout anneau commutatif unitaire $A = A'[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s]$, où A' est un anneau intègre, tous les générateurs $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ sont nilpotents et toutes les relations (par rapport à A') entre ces générateurs dérivent des relations "monomiales" de la forme $m(\xi_1, \dots, \xi_s) = 0$, où les $m(X_1, \dots, X_s)$ sont des monômes unitaires : $X_1^{i_1} X_2^{i_2} \dots X_s^{i_s}$ [que l'on écrit aussi X^i , où $X = (X_1, \dots, X_s)$ et $i = (i_1, \dots, i_s)$]. L'anneau A est isomorphe à $A'[X_1, \dots, X_s] / \mathfrak{I}$, où $\mathfrak{I}$ est l'idéal de $A'[X_1, \dots, X_s]$ engendré par les monômes unitaires $m(X_1, \dots, X_s)$ tels que $m(\xi_1, \dots, \xi_s) = 0$ et, par suite est déterminé, à un A' -isomorphisme près, par l'ensemble W de tels monômes. Ainsi, si M est le demi-groupe multiplicatif des monômes unitaires $m(X_1, \dots, X_s)$ en $X_1, \dots, X_s$, chaque anneau nilmonique A définit la partition (V, W) de M , où V (qui est fini) est l'ensemble des $m(X_1, \dots, X_s) \in M$ tels que $m(\xi_1, \dots, \xi_s) \neq 0$ et W (qui est un idéal du demi-groupe M) est celui des $m(X_1, \dots, X_s) \in M$ tels que $m(\xi_1, \dots, \xi_s) = 0$. Inversement, si A' est fixé, la partition précédente détermine A à un A' -isomorphisme près.

Si A est valable et si v_0 est sa valuation minimale, on peut supposer, sans restreindre la généralité, que les ξ_q sont numérotés de manière que $v_0(\xi_1) \geq v_0(\xi_2) \geq \dots \geq v_0(\xi_s)$. De sorte que si $m = m(X_1, \dots, X_s)$ et $m' = m'(X_1, \dots, X_s)$ sont deux monômes tels que $m' = m X_q X_{q'}^{-1}$, où $1 \leq q < q' \leq s$, on a $m(\xi_1, \dots, \xi_s) \neq 0 \Rightarrow m'(\xi_1, \dots, \xi_s) \neq 0$ (cela résulte du théorème de valuabilité), donc $m \in V \Rightarrow m' \in V$. Ainsi, pour caractériser les anneaux nilmoniques valables, il suffit de caractériser les partitions correspondantes parmi les partitions (V, W) de M telles que : 1°) V est fini, 2°) W est un idéal

du demi-groupe multiplicatif M , 3°) si $1 \leq q < q' \leq s$, si $m \in V$ et si

$m' = m X_q X_{q'}^{-1} \in M$, on a $m' \in V$. Notons $M(\xi)$ l'ensemble

$\{m(\xi_1, \dots, \xi_s) ; m(X_1, \dots, X_s) \in M\}$. Si A est valable, la sous-famille

$\mathfrak{N}_{(m)} = \{N(a) ; a \in M(\xi)\}$ doit être totalement ordonnée par inclusion. En plus,

on montre que si $a \in M(\xi)$, $N(a)$ est la famille de polynômes engendrés (sur A')

par l'ensemble $N_{(m)}(a) = N(a) \cap M(\xi)$, ce qui implique que $\mathfrak{N}_{(m)}$ et la sous-famille

$\mathfrak{N}^{(m)} = \{N(a) \cap M(\xi) ; a \in M(\xi)\}$ sont en même temps totalement ordonnées par

inclusion. On dira que A est prévaluable si cette dernière condition [qui se formule à partir du demi-groupe multiplicatif $M(\xi)$] est satisfaite, dans ce cas (V, W) sera dite une partition de préévaluation de M .

On peut géométriser comme suit les conditions de prévaluabilité. Z étant l'anneau des entiers rationnels (et N étant l'ensemble des entiers ≥ 0),

soit Z^s le produit cartésien de s ensembles égaux à Z , considéré comme module

sur Z . Si $z = (z_1, \dots, z_s) \in Z^s$, le point $\bar{z} = (z_1, \dots, z_{s-1}, 0)$ sera dit la

projection horizontale de z et $(0, \dots, z_s)$ sera dit sa projection verticale.

L'hyperplan $z_s = 0$ sera dit l'hyperplan horizontal de Z^s et sera noté $\bar{Z}^s$. Si

$1 \leq l \leq s$, on notera e_l le point $z = (z_q = \delta_{lq})$ [où δ_{lq} est le symbole de

Kronecker]. L'ordre produit sur Z^s sera noté $\leq_p$. L'ensemble Q_z des $z' \in Z^s$

tels que $z \leq_p z'$, où $z \in Z^s$, s'appelle l'hyperquadrant principal de z . En

particulier $Q_0 = N^s$ (0 désigne le point de Z^s dont toutes les composantes sont nulles) est dit l'hyperquadrant principal.

Considérons l'injection canonique

$\theta : m(X_1, \dots, X_s) = X_1^{i_1} \dots X_s^{i_s} \rightarrow i(m) = (i_1, \dots, i_s)$ de M dans Z^s qui applique M

sur $Q_0 = N^s$. Si (V, W) est une partition de M satisfaisant aux conditions

1°), 2°) et 3°) précédentes, son image $(V' = \theta.V, W' = \theta.W)$ est une partition Π

de N^s satisfaisant aux conditions : 1°)' V' est fini, 2°)' si $i \in W'$ et si

$i \leq_p j$, on a $j \in W'$, 3°)' si $1 \leq q < q' \leq s$ et si $i, j = i + e_q - e_{q'} \in N^s$, on a

$i \in V'$ implique $j \in V'$.

Inversement, toute partition Π de N^S satisfaisant aux conditions 1°)', 2°)' et 3°)' précédentes est l'image par θ d'une partition de M satisfaisant aux conditions 1°), 2°) et 3°). De telles partitions $\Pi = (V', W')$ de N^S sont dites canoniques ; et si E est l'ensemble des points limites de Π , autrement dit des $i \in W'$ tels qu'il existe un $i - e_q$ ($q = 1, 2, \dots, s$) appartenant à V' , Π est déterminée par E , car $W' = \{j \in N^S ; (\exists i \in E)[i \leq_p j]\}$. On écrira $V' = \text{int}.E$, $W' = \text{ext}.E$. On appelle E l'ensemble ML de la partition canonique Π , et un $E \subseteq Z^S$ est dit un ensemble de type ML s'il est l'ensemble ML d'une partition canonique. L'ensemble ML d'une partition canonique $(V', W') = (\theta.V, \theta.W)$ est dit de préévaluation si (V, W) est de préévaluation.

Les ensembles de type ML se caractérisent comme suit, supposant qu'on les connaisse dans $\overline{Z^S}$ de dimension $s-1$ en prenant z_{s-1} comme coordonnée verticale de $\overline{z} = (z_1, \dots, z_{s-1}) \in \overline{Z^S} : E \subseteq Q_0 = N^S$ est un ensemble de type ML de Z^S si, et seulement si, a) $\overline{E}_0 = E \cap \overline{Z^S}$ est de type ML dans $\overline{Z^S}$, b) la projection horizontale de $E - \overline{E}_0$ est $\text{int}.\overline{E}_0$, c) pour tout $\overline{z} \in \text{int}.\overline{E}_0 \cup \overline{E}_0$, il existe un et un seul point $(\overline{z}, j_s(\overline{z}))$, qui appartient à E , d) si $1 \leq q < q' < s$ et si $\overline{z} \in \text{int}.\overline{E}_0$, on a $j_s(\overline{z} + \overline{e}_q - \overline{e}_{q'}) \geq j_s(\overline{z}) \geq j_s(\overline{z} + \overline{e}_{q'})$, e) E est fini. Si $T = T(t) : z \rightarrow z + t$, où $t \in Z^S$, est une translation de Z^S (on la dira aussi une translation entière de l'espace réel $R^S \supseteq Z^S$, où R est la droite réelle), on dira que la translatée $T.E$ de E ne traverse pas E , si ou bien $T.\text{int}E \cap N^S \subseteq \text{int}.E$, ou bien $T.\text{ext}E \cap N^S \subseteq \text{ext}.E$.

Alors, E est de préévaluation si, et seulement si aucune de ses translatées par les translations de Z^S ne le traverse.

Considérons les analogues indéfinis des ensembles de type ML, qu'on appelle hypersurfaces indéfinies limites [abrégé (H.I.L.)] de Z^S (qu'on dira courbes indéfinies limites si $s = 2$). Ce sont des $E \subseteq Z^S$ tels que :

a') pour tout $\overline{z} \in \overline{Z^S}$ il existe un, et un seul point $(\overline{z}, j_s(\overline{z})) \in E$ dont la projection horizontale soit $\overline{z}$, b') pour tout $\overline{z} \in \overline{Z^S}$ et si q, q' sont tels que $1 \leq q \leq q' < s$, on a $j_s(\overline{z} + \overline{e}_q - \overline{e}_{q'}) \geq j_s(\overline{z}) \geq j_s(\overline{z} + \overline{e}_{q'})$, c') pour tout $z \in Z^S$, $Q_z \cap E$ est fini.

Si $T = T(t)$, $t \in Z^s$, on dira que $T(t).E$ ne traverse pas E si, ou bien $T(t).int.E \subseteq int.E$ ou bien $T(t).int.E \supseteq int.E$. On dira qu'un tel E est de préévaluation si aucun $T(t).E$, où $t \in Z^s$, ne traverse E . Il est clair que si $z \in Z^s$, $T(-z).[E \cap Q_z]$ est un ensemble de type ML (s'il n'est pas vide ou réduit à $\{\emptyset\}$), qui est de préévaluation si E l'est. Un ensemble de type ML dont une translatée coïncide avec une partie d'une hypersurface indéfinie limite est dit prolongeable. Pour un ensemble de type ML prolongeable, on montre sans difficulté que l'anneau nilmonique correspondant est non seulement préévaluable mais evaluable [chapitre IX, théorème 1 et 2]. Si $s = 2$ et si E est une (H.I.L.), on notera $i(z_2)$ la plus petite valeur z_1 telle que $(z_1, z_2) \in E$ (cette fonction détermine E et est appelée sa "fonction i "). Si E est une (H.I.L.) de préévaluation de Z^s , un $t \in Z^s$ est dit période de E si $T(t).E = E$. Les périodes de E forment un sous-groupe additif $\mathfrak{P}_E$ de Z^s , dont le rang p est au plus égal à $s-1$. On dit que E est périodique si $p = s-1$. Tout ensemble de type ML prolongeable peut être considéré comme une translatée d'une partie d'une (H.I.L.) périodique.

$\mathcal{G}(E) = Z^s / \mathfrak{P}_E$ est un groupe abélien libre de rang $r = s - p \geq 1$,

et peut être considéré comme totalement ordonné en posant

$T(t) + P(E) > T(t') + P(E)$ si $T(t-t').E$ est au-dessus de E [en effet, si $t - t' \notin \mathfrak{P}_E$, $T(t - t').E$ est au-dessus ou au-dessous de E au sens strict].

Le rang ordinal r_o de $\mathcal{G}(E)$ est tel que $0 < r_o \leq r$ [chapitre V, § 1 et 2].

On peut caractériser comme suit les (H.I.L.) de préévaluation en tant qu'ensembles de points de $R^s \supseteq Z^s$. Soit H un hyperplan non vertical de R^s d'équation $z_s = \alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2 + \dots + \alpha_{s-1} z_{s-1} + h$. Alors $\alpha = \alpha(H) = (\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}) \in R^{s-1}$ sera dit le paramètre (ou pente) de H et $h(H) = h$ sa hauteur, qu'on dira aussi α -hauteur $h_\alpha(P)$ de tout point $P \in H$. Si $A \subseteq Z^s$, on appelle α -épaisseur de A (où $\alpha \in R^{s-1}$) la borne supérieure (qui peut être $+\infty$) $Ep_\alpha(A)$ des différences des α -hauteurs des points de A . Si $Ep_\alpha(A)$ est finie, il existe des hyperplans tangents inférieur H_α^l et supérieur H_α^u à A de paramètre α (ces hyperplans sont dits α -tangents à A) et tels que

$h(H'_\alpha) = \inf_{P \in A} (h_\alpha(P))$, $h(H''_\alpha) = \sup_{P \in A} (h_\alpha(P))$ et $Ep_\alpha(A) = h(H''_\alpha) - h(H'_\alpha)$. On

appelle épaisseur de A la borne inférieure $Ep(A)$ des $Ep_\alpha(A)$, où α parcourt R^{s-1} .

On a les résultats généraux suivants : 1) si A est fini, $Ep_\alpha(A)$ est finie pour tout $\alpha \in R^{s-1}$ et $Ep_\alpha(E)$ tend vers $+\infty$ avec $|\alpha| = \max_q (|\alpha_q|)$ ($q = 1, 2, \dots, s-1$) ;

2) si $\mu(A)$ est l'ensemble (dit ensemble de minceur de A) des $\alpha \in R^{s-1}$ tels que $Ep_\alpha(A) = Ep(A)$, $\mu(A)$ est un polyèdre convexe de R^{s-1} ; 3) si $Ep(A) < +\infty$ et $\alpha \in \mu(A)$, les projections horizontales des enveloppes convexes de $H'_\alpha \cap E$ et $H''_\alpha \cap E$ se coupent ; 4) si $A \subseteq Z^s$ est fini, les sommets de $\mu(A)$ sont rationnels ; 5) si $A \subseteq Z^s$ est infini et si $Ep(A) < +\infty$, l'ensemble $\mu(A)$ est réduit à un seul

point. A partir de là, on peut montrer que $E \subseteq Z^s$ est une (H.I.L.) de préévaluation si et seulement si : 1°) $Ep(E) \leq 1$; 2°) si $Ep(E) < 1$, E est l'ensemble de tous les points entiers de la couche demi-ouverte $[H'_\alpha, H'_\alpha + e_s[$,

où $\{\alpha\} = \mu(E)$; 3°) si $Ep(E) = 1$, E est la réunion des points entiers de la couche ouverte $]H'_\alpha, H''_\alpha = H'_\alpha + e_s[$ et d'une partie, satisfaisant à certaines conditions [ces conditions, trop longues à formuler ici, s'expriment à l'aide de la notion de demi-drapeau], des points entiers de $H'_\alpha \cup H''_\alpha$. En outre, on

prouve qu'une (H.I.L.) E est de préévaluation et périodique si et seulement si $Ep(E) < 1$, auquel cas, si $\mu(E) = \{\alpha\}$, α est rationnel. On prouve également que, pour $s = 2$, tout ensemble de type ML de préévaluation est prolongeable car son épaisseur est < 1 . Par contre, déjà pour $s = 3$, on a un exemple d'un tel ensemble de type ML (d'épaisseur 1), qui n'est pas prolongeable et on peut montrer qu'il en existe pour tout $s \geq 3$. Toutefois, des ensembles de type ML de préévaluation et non prolongeables doivent satisfaire à des conditions très restrictives et apparaissent comme singuliers [chapitre V, § 3,4,5,6 et 7 et chapitre IX].

La caractérisation des (H.I.L.) de préévaluation peut être encore explicitée. Dans le cas $s = 2$, on utilise la notion de fractions "négacontinues", assez proche de celle des fractions continues [chapitres VII et VIII].

Si $s = 2$, supposons que E est une (H.I.L.) préévaluation et que $\mu(E) = \{\alpha\}$. Décomposons α en fraction "négacontinue"

$$\alpha = d_0 - \frac{1}{d_1 - \frac{1}{d_2 - \dots - \frac{1}{d_q - \frac{1}{\dots}}}}$$

où $d_0, d_1, \dots, d_q, \dots$ sont des entiers qui pour $q > 0$ sont ≥ 2 ; ce développement est fini ou infini selon que α est rationnel ou irrationnel. Posons, pour $q > 0$, $l_q = d_q - 2$ et construisons dans R^2 une suite de courbes commençant au point $\hat{0} = (0,0)$ [si $S_1, S_2, \dots, S_m$ sont des courbes de R^2 , $S_1 + \dots + S_m$ désigne leur juxtaposition commençant au même point que S_1 et $1S$ désigne $S + S + \dots + S$ (1 fois)]. $\mathcal{L}_0$ et $\mathcal{P}_0$ seront les segments orientés de projection horizontale de longueur 1 dont $\mathcal{L}_0$ est horizontal et $\mathcal{P}_0$ de pente -1. $\mathcal{L}_{q-1}, \mathcal{P}_{q-1}$ étant déjà construits, on pose $\mathcal{L}_q = (l_q + 1)\mathcal{L}_{q-1} + \mathcal{P}_{q-1}$, $\mathcal{P}_q = l_q \mathcal{L}_{q-1} + \mathcal{P}_{q-1}$. Si la fin de la courbe $\mathcal{L}_q$ est le point (a_q, b_q) , on montre que

$\frac{b_q}{a_q}$ est la q -ième réduite du développement précédent de α , c'est-à-dire que

$\frac{b_0}{a_0}, \frac{b_1}{a_1}, \dots, \frac{b_q}{a_q}$ sont les meilleures approximations supérieures, par des

rationnels, de α . Si α est rationnel et son développement se termine par d_m ,

on a $\alpha = \frac{b_m}{a_m}$ et il se trouve que la partie de E entre les abscisses 0 et a_m , où

on suppose que $\hat{0} \in E$, est précisément $\mathcal{L}_m \cap Z^2$. Si $Ep(E) < 1$, E est périodique :

c'est l'ensemble des points entiers de la courbe $\dots + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_m + \mathcal{L}_m + \dots$

qui est une répétition dans les deux sens de la courbe $\mathcal{L}_m$ (toutefois, si $\alpha = -1$,

il y a lieu de remplacer $\mathcal{L}_m$ par $\mathcal{P}_0$). Si $Ep(E) = 1$, E est l'ensemble des points

entiers de la courbe de l'une des formes $\dots + \mathcal{L}_m + \dots + \mathcal{L}_m + \mathcal{P}_m + \mathcal{L}_m + \dots + \mathcal{L}_m + \dots$,

$\dots + \mathcal{P}_m + \dots + \mathcal{P}_m + \dots + \mathcal{P}_m + \mathcal{L}_m + \mathcal{P}_m + \dots + \mathcal{P}_m + \dots$, où la courbe $\mathcal{P}_m$ (resp. $\mathcal{L}_m$)

est suivie et précédée d'une infinité de $\mathcal{L}_m$ (resp. $\mathcal{P}_m$).

Dans le premier cas, E est périodique de période (a_m, b_m) et on a $p = 1, r = r_0 = 1$; dans le second cas, $p = 0$ et $r = r_0 = 2$. Si α est irrationnel et si $\bar{o} \in E$, E est l'ensemble des points entiers de la courbe, qui est la limite inductive des courbes $\mathcal{P}_q + \mathcal{L}_q$, où $\mathcal{L}_q$ se termine au point $\bar{o} = (0, 0)$ [en général, on a un résultat analogue, mais avec des courbes partielles autrement emboîtées les unes dans les autres]. On a ici $p = 0, r = 2, r_0 = 1$ et $\mathcal{C}(E)$ est un groupe archimédien dense. Si $\bar{o} \in E$, et si P_z est le point de E d'abscisse $z \geq 0$, et si l'on met z sous la forme $u_0 + u_1 a_1 + u_2 a_2 + \dots$, où $0 \leq u_q < a_{q+1}$; on montre que $j(z) = u_1 b_1 + u_2 b_2 + \dots$, et on a une formule analogue pour $z < 0$.

Supposons que $s > 2$ et E est une (H.I.L.). Soient E_j l'intersection de E avec l'hyperplan $z_s = j$ et $\bar{E}_j$ la projection horizontale de E_j . Si E est de préévaluation et périodique, $\bar{E}_0$ l'est aussi dans $\bar{Z}^s \simeq Z^{s-1}$, le groupe $\mathcal{C}(\bar{E}_0)$ est cyclique et tout $\bar{E}_j$ est une translatée de $\bar{E}_0$. Dès lors, si $\bar{\tau}$ est une translation de $\bar{Z}^s$ telle que $\bar{\tau} + P(\bar{E}_0)$ soit le générateur positif de $\mathcal{C}(\bar{E}_0)$, on a $\bar{E}_j = \bar{\tau}^{i(j)} \cdot \bar{E}_0$ et on montre que E est de préévaluation et périodique si et seulement si $i(j)$ est la "fonction i " d'une courbe indéfinie limite.

La caractérisation des (H.I.L.) de préévaluation à partir des invariants $(l_1, l_2, \dots, l_q, \dots)$ et des courbes $\mathcal{L}_q, \mathcal{P}_q$ et également la caractérisation explicite indiquée des (H.I.L.) périodiques, dans le cas $s > 2$ ont été trouvées antérieurement à la caractérisation des (H.I.L.) de préévaluation à l'aide des couches de R^s d'épaisseur ≤ 1 , les démonstrations se faisant sans plonger Z^s dans R^s .

Mais certaines parties de ces démonstrations étaient compliquées et excessivement techniques, telle la démonstration de prévaluabilité des $\mathcal{L}_q$ et celle de prolongabilité des ML de préévaluation quand $s = 2$. C'est Monsieur NERON qui suggéra qu'on pourrait peut-être simplifier ces démonstrations en caractérisant les (H.I.L.) de préévaluation à l'aide des couches de R^s d'épaisseur ≤ 1 , ce qui, effectivement, clarifie les choses et permet de supprimer les démonstrations en question. C'est également Monsieur NERON qui

a suggéré que les fractions continues devraient servir de liaison, dans le cas $s = 2$, entre les deux caractérisations. Cela est presque exact, mais étant donné que les points de E constituent les meilleures approximations supérieures de la droite $y = \alpha x$, et pas les meilleures approximations en valeur absolue, ce sont en réalité les fractions négatives qui interviennent.

Chapitre I

VALUATION DES ANNEAUX AVEC DIVISEURS DE 0.

PROPRIETES DES ANNEAUX VALUABLES ET CRITERE DE VALUABILITE

Dans toute cette partie, sauf mention expresse du contraire, A désigne un anneau quelconque ; D désigne un demi-groupe commutatif, noté multiplicativement, totalement ordonné et possédant un plus petit élément 0_D .

§ (1.1) - ANNEAUX VALUABLES.

(1.1.1.) Définition. Soient A un anneau, D un demi-groupe. On appelle valuation de A à valeurs dans D , une application $v : A \longrightarrow D$ telle que

$$V_1) \quad v(x) = 0_D \iff x = 0.$$

$$V_2) \quad v(xy) = v(x)v(y),$$

$$V_3) \quad v(x + y) \leq \max[v(x), v(y)],$$

$$W) \quad v(-x) = v(x),$$

quels que soient $x, y \in A$.

L'image de A par v , notée $D_v(A)$ ($D(A)$ si aucune confusion n'est à craindre), est un sous-demi-groupe de D , dit le demi-groupe de valuation de A par v ou simplement demi-groupe de valeurs de v .

(1.1.2.) Définition. Soit A un anneau. On dit que A est valable s'il existe un demi-groupe D et une application v de A dans D vérifiant les conditions de la définition (1.1.1.).

(1.1.3) Soit D un demi-groupe. S'il existe un anneau valable A et une valuation v de A telle que $D(A) \subseteq D$, on voit que 0_D est l'élément absorbant de $D(A)$.

En effet, pour tout $d \in D(A)$, il existe $a \in A$ tel que $v(a) = d$.

Ce qui entraîne

$$0_D d = v(0)v(a) = v(0a) = v(0) = 0_D.$$

(1.1.4) Si A possède un élément unité, il est clair que $v(1)$ est l'unité de $D(A)$; cette unité ne coïncide pas nécessairement avec celle de D , si elle existe.

Cependant, si D possède une unité 1_D et si l'on suppose que $1_D \in D(A)$, on a

$$v(1) = 1_D.$$

En effet, on a $1_D \in D(A)$, il existe donc $a \in A$ tel que $v(a) = 1_D$. Mais 1 est l'unité (supposée exister) de A , d'où résulte

$$1_D = v(a) = v(1a) = v(1)v(a) = v(1).$$

On peut toujours restreindre D à $D(A)$. Il n'y a donc pas perte de généralité à supposer, dans le cas où A est unitaire, que D possède un élément unité 1_D et que

$$v(1) = 1_D.$$

(1.1.5) Soit A un anneau unitaire valuable. L'axiome W de la définition (1.1.1) est alors une conséquence de l'axiome V_2 de la même définition.

Sans l'axiome W , on montre que $v(-1) = v(1)$. En effet, dans $D(A)$, $v(-1) < v(1)$ entraîne $v(1) = v((-1)^2) \leq v(-1)$. De la même façon, $v(-1) > v(1)$ entraîne $v(1) \geq v(-1)$. Mais alors, $v(-x) = v((-1)x) = v(-1)v(x) = v(x)$, car l'unité de $D(A)$ est égale à $v(1)$.

(1.1.6) Soient $x, y \in A$ tels que $v(x) \neq v(y)$. Les axiomes W et V_3 de la définition (1.1.1), dans le cas où A est unitaire, les axiomes V_2 et V_3 de la même définition montrent que l'on a $v(x+y) = \max[v(x), v(y)]$, donc pour qu'une somme $S = \sum_{i=1}^n x_i$, $x_i \in A$, soit nulle, c'est-à-dire de valuation égale à 0_D , il

faut qu'il existe j, k ($1 \leq j < k \leq n$) tels que $v(x) = v(y)$. Cette condition n'est pas suffisante.

(1.1.7) Les remarques faites dans (1.1.4) et (1.1.5) montrent que les valuations définies pour les corps ou les anneaux intègres ne sont qu'un cas particulier de celles plus générales obtenues par la définition (1.1.1).

Pour le voir, il suffit de remplacer (dans la définition (1.1.1)) le mot demi-groupe par groupe. D'ailleurs un groupe est un demi-groupe particulier.

(1.1.8) Pour les corps (même gauches) plus généralement pour les anneaux sans diviseur de zéro, l'application v ($v(o) = 0_D, v(x) = 1_D$, quel que soit $x \in A, x \neq o$) de A dans D est une valuation - dite triviale - au sens de la définition (1.1.1).

Il n'en est plus de même si A possède des diviseurs de zéro, car pour cette application, l'axiome V_2 de la définition rappelée plus haut n'est pas satisfait.

Cela pose le problème de la caractérisation des anneaux valuables auquel nous nous intéresserons en premier lieu. Nous serons amenés ainsi à exhiber une valuation canonique des anneaux valuables. En particulier pour les anneaux sans diviseur de zéro qui, on vient de le voir, sont valuables, cette valuation canonique se réduit à la valuation triviale.

§ (1.2) - PREMIERES PROPRIETES DES ANNEAUX VALUABLES.

(1.2.1) Définition. Soient A un anneau, a et b des éléments de A tels que $ab = 0$. On dira comme d'habitude que a est annulateur à gauche de b ou que b est annulateur à droite de a .

Pour tout $a \in A$, l'ensemble des annulateurs à gauche (resp. à droite) de a sera noté $N_g(a)$ (resp. $N_d(a)$).

Si $N_g(a) = N_d(a)$ on emploiera la notation $N(a)$ pour désigner à la fois $N_g(a)$ et $N_d(a)$.

(1.2.2) Définition. Soient A un anneau, $a \in A$, $a \neq 0$, on dit que a est annulateur propre de A , si on a

$$aA = Aa = \{0\},$$

c'est-à-dire $N(a) = A$.

(1.2.3) Soient A un anneau, $\pi = a_1 \dots a_i \dots a_s$ ($a_i \in A$) un produit fini de s éléments de A , σ une permutation de l'ensemble $\{1, 2, \dots, s\}$ et π_σ le produit $a_{\sigma(1)} \dots a_{\sigma(i)} \dots a_{\sigma(s)}$. Si A est valable et si v est une valuation de A dans D , la condition V_2 de la définition (1.1.1) et la commutativité de D montrent que $v(\pi) = v(\pi_\sigma)$. Donc, si $\pi = 0$, c'est-à-dire $v(\pi) = 0_D$, on a

$$v(\pi_\sigma) = v(\pi) = 0_D \text{ donc } \pi_\sigma = 0; \text{ d'où la proposition suivante.}$$

(1.2.4) Proposition. Les notations dans (1.2.3) étant conservées, si A est valable, on a

$$1. v(\pi) = v(\pi_\sigma),$$

$$2. \pi_\sigma = 0 \iff \pi = 0$$

pour tout σ .

(1.2.5) Corollaire. Soit A un anneau valable. On a les propriétés suivantes

$$1. ab = 0 \iff ba = 0 \text{ quels que soient } a, b \in A.$$

$$2. N_g(a) = N_d(a) \text{ quel que soit } a \in A.$$

(1.2.6) Définition. Soit A un anneau tel que pour tout $a \in A$ on ait $N_g(a) = N_d(a)$ ($=N(a)$), tel est le cas des anneaux valuables (2. corollaire (1.2.5)). Si a et b sont des éléments de A tels que $ab = 0$, c'est-à-dire $a \in N(b)$ et $b \in N(a)$, on dira que a et b sont des annulateurs mutuels dans A .

(1.2.7) On sait que, dans un anneau A , l'ensemble $N_g(a)$ (resp. $N_d(a)$) ($a \in A$) est un idéal à gauche (resp. à droite). Si $N_g(a) = N_d(a)$, il est clair que cet ensemble est un idéal bilatère. D'où le résultat suivant.

Corollaire. Soit A un anneau tel que pour tout $a \in A$ on ait $N_g(a) = N_d(a)$ (en particulier soit A un anneau valable). Pour tout $a \in A$, l'ensemble $N(a)$ est un idéal bilatère de A .

Si A est un anneau vérifiant les hypothèses du corollaire précédent, on note

$$\mathfrak{N} = \{N(a), a \in A\}.$$

(1.2.8) Corollaire. Soit A un anneau valable. Quels que soient $a, b \in A$ on a

$$N(ab) = N(ba)$$

(1.2.9) Proposition. Soient A un anneau valable, v une valuation de A . Quels que soient $a, b \in A$, on a

$$v(a) \leq v(b) \implies N(b) \subseteq N(a)$$

En effet, $x \in N(b) \iff bx = 0 \iff v(bx) = 0_D$. Donc $v(ax) = v(a)v(x) \leq v(b)v(x) = v(bx) = 0_D$. Comme 0_D est le plus petit élément de D , on a $v(ax) = 0_D$, c'est-à-dire $ax = 0$.

(1.2.10) On conserve les données de la proposition (1.2.9).

Corollaire 1. $v(a) = v(b) \implies N(a) = N(b)$.

Corollaire 2. L'ensemble $\mathfrak{N} = \{N(a), a \in A\}$ est totalement ordonné par inclusion.

Remarque. La réciproque du corollaire 1 est fausse en général. En effet, pour tout anneau intègre qui n'est pas un corps, il existe des valuations non triviales.

§ (1.3) - CRITERE DE VALUABILITE DES ANNEAUX.

(1.3.1) Théorème. (Critère de valuabilité des anneaux).

Soit A un anneau. Pour que A soit valable, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites.

$$(C.V.1) \quad N_g(a) = N_d(a) (=N(a)),$$

$$(C.V.2) \quad N(ab) = N(ba),$$

quels que soient $a, b \in A$.

(C.V.3) La famille $\mathfrak{N} = \{N(a), a \in A\}$ est totalement ordonnée par inclusion.

Les corollaires (1.2.5), (1.2.8) et 2 (1.2.10) montrent que les conditions énoncées dans le théorème sont nécessaires.

Avant de montrer que ces conditions sont aussi suffisantes, ce qui achèvera la démonstration du théorème, on montre

(1.3.2) Lemme. Soit A un anneau. Si a, b et c sont des éléments de A on a

$$1. N_g(a) \subseteq N_g(b) \implies N_g(ca) \subseteq N_g(cb).$$

$$2. N_d(a) \subseteq N_d(b) \implies N_d(ac) \subseteq N_d(bc).$$

Montrons par exemple le point 1 ; le point 2 se démontre de façon identique.

Soit $x \in N_g(ca)$, on a $x(ca) = 0 \iff (xc)a = 0$, c'est-à-dire $xc \in N_g(a)$, mais alors $xc \in N_g(b)$. Autrement dit, on a $(xc)b = 0 \iff x(cb) = 0$ donc $x \in N_g(cb)$.

(1.3.3) Corollaire. Soit A un anneau. Si a, b et c sont des éléments de A on a

$$1. N_g(a) = N_g(b) \implies N_g(ca) = N_g(cb).$$

$$2. N_d(a) = N_d(b) \implies N_d(ac) = N_d(bc).$$

(1.3.4) Corollaire. Soit A un anneau tel que pour tout $a \in A$ on ait $N_g(a) = N_d(a)$ ($= N(a)$). Si a, a', b, b' sont des éléments de A tels que $N(a) \subseteq N(a')$ et $N(b) \subseteq N(b')$, on a

$$N(ab) \subseteq N(a'b').$$

(1.3.5) Corollaire. Soit A un anneau tel que pour tout $a \in A$ on ait $N_g(a) = N_d(a)$ ($= N(a)$). Si a, a', b, b' sont des éléments de A tels que $N(a) = N(a')$ et $N(b) = N(b')$, on a

$$N(ab) = N(a'b').$$

(1.3.6) Lemme. Soit A un anneau tel que pour tout $a \in A$ on ait $N_g(a) = N_d(a)$ ($= N(a)$). Si a, a', b, b' sont des éléments de A tels que $N(a) \subseteq N(a')$ et $N(b) \subseteq N(b')$, on a

$$ab = 0 \implies a'b' = 0.$$

On remarque que si A ne possède pas d'annulateur propre, le lemme résulte du corollaire (1.3.4) car, si A ne possède pas d'annulateur propre, on a

$$N(a) = A \iff a = 0.$$

Dans le cas général, on a $ab = 0 \iff b \in N(a)$. Mais comme $N(a) \subseteq N(a')$, on a $ab = 0 \implies ba' = 0 \iff a' \in N(b)$ mais comme $N(b) \subseteq N(b')$, $ba' = 0 \implies a'b' = 0$.

(1.3.7) Corollaire. Soit A un anneau tel que pour tout $a \in A$ on ait $N_g(a) = N_d(a) (= N(a))$. Si a, b, a', b' sont des éléments de A tels que $N(a) = N(a')$ et $N(b) = N(b')$ on a

$$ab = 0 \iff a'b' = 0$$

(1.3.8) Fin de la démonstration du théorème (1.3.1). Les conditions sont suffisantes. On distingue deux cas : A ne possède pas d'annulateur propre et A possède des annulateurs propres. Dans chacun des cas, on construit un demi-groupe totalement ordonné D et une application v de A sur D vérifiant les conditions de la définition (1.1.1).

A ne possède pas des annulateurs propres. Dans ce cas prenons comme support du demi-groupe D l'ensemble $\mathfrak{N} = \{N(a), a \in A\}$ ordonné par anti-inclusion, c'est-à-dire $N(a) \leq N(b) \iff N(a) \supseteq N(b)$. La condition (C.V.3) prouve que l'ordre ainsi défini est un ordre total sur D et $N(0) = A$ est son plus petit élément ; donc $0_D = N(0) = A$.

La multiplication dans D est définie de la façon suivante. $N(a) * N(b) = N(ab)$. Le corollaire (1.3.5) montre que cette opération est bien définie.

L'associativité de cette multiplication résulte de celle de la multiplication dans A , la commutativité résultant de la condition (C.V.2).

Montrons que D muni de la multiplication et de l'ordre définis comme précédemment est un demi-groupe totalement ordonné.

Soient $N(a), N(b) \in \mathfrak{N}$ tels que $N(a) \leq N(b)$, c'est-à-dire $N(a) \supseteq N(b)$. Pour tout $N(c) \in \mathfrak{N}$ on a $N(ac) \supseteq N(bc) \iff N(a) * N(c) \leq N(b) * N(c)$. Cela résulte, par exemple, du corollaire (1.3.4).

Montrons que l'application $v : A \longrightarrow D$ définie par $v(a) = N(a)$ vérifie les conditions de la définition (1.1.1).

Comme A ne possède pas d'annulateur propre, $v(a) = N(0) = A = 0_D$ équivaut à $a = 0$.

D'après la définition de la multiplication dans D , on a $v(ab) = N(ab) = N(a) * N(b) = v(a)v(b)$.

Soient $N(a), N(b) \in \mathfrak{N}$, d'après la condition (C.7.3), on a ou bien $N(a) \subseteq N(b)$ ou bien $N(b) \subseteq N(a)$. Dans les deux cas on aura $\max(N(a), N(b)) = N(a) \cap N(b)$ (pour l'ordre défini sur D). Si $x \in N(a) \cap N(b)$ on a $x(a+b) = 0$, c'est-à-dire $\max(N(a), N(b)) \subseteq N(a+b)$ autrement dit $N(a+b) \leq \max(N(a), N(b))$.

Enfin si $x, a \in A$, on a par exemple $x(-a) = -(xa)$ d'où résulte $N(a) \subseteq N(-a)$ pour tout $a \in A$. Ce qui achève la démonstration du théorème dans le cas considéré.

A possède des anneaux propres. Dans ce cas la construction précédente ne conduit pas à une valuation au sens de la définition (1.1.1), car pour tout annulateur a de A , y compris 0 , on aurait $v(a) = A = 0_D$ en sorte que $v(a) = 0_D$ n'entraînerait pas $a = 0$ (l'axiome V_1 (définition (1.1.1)) non satisfait). Nous sommes donc amenés, si nous voulons faire une construction du même genre, à adjoindre à $\mathfrak{N}$ un élément supplémentaire donc différent de $N(a)$ quel que soit $a \in A$ et que nous prendrons comme 0_D . Prenons alors comme support de D l'ensemble $\mathfrak{M}' = \mathfrak{N} \cup \{0_D\}$ où 0_D est un élément extra et $\mathfrak{N}$ est l'ensemble considéré dans le premier cas.

On pose $0_D < N(a)$ pour tout $N(a) \in \mathfrak{N}$. Les éléments de $\mathfrak{M}'$ restent ordonnés comme dans le premier cas. On a visiblement un ordre total sur $\mathfrak{M}'$ et 0_D est le plus petit élément de $\mathfrak{M}'$ muni de l'ordre que l'on vient de définir.

La multiplication sur $\mathfrak{M}'$ est définie de la façon suivante :

$0_D * N(a) = N(a) * 0_D = 0_D$ pour tout $N(a) \in \mathfrak{N}$, $0_D * 0_D = 0_D$; si $N(a), N(b) \in \mathfrak{N}$ on pose $N(a) * N(b) = N(ab)$ si $ab \neq 0$ et $N(a) * N(b) = 0_D$ si $ab = 0$. Les corollaires (1.3.5) et (1.3.7) montrent que cette multiplication est bien définie.

Montrons que la multiplication ainsi définie est associative. Soient

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{M}'$. On considère les produits $\pi_1 = \alpha * (\beta * \gamma)$ et $\pi_2 = (\alpha * \beta) * \gamma$.

Si $\pi_1 = 0_D$, d'après la définition de la multiplication sur $\mathfrak{M}'$ on a l'une des situations suivantes : $\alpha = 0_D$ ou $(\beta * \gamma) = 0_D$, c'est-à-dire $\beta = 0_D$ ou $\gamma = 0_D$

ou encore $\beta = N(b)$, $\gamma = N(c)$ et $bc = 0$ ou enfin $\alpha = N(a)$, $\beta = N(b)$, $\gamma = N(c)$, $bc \neq 0$ et $a(bc) = 0$. Dans chacun des cas ainsi mis en évidence, on vérifie sans peine, compte tenu de l'associativité de la multiplication dans A , que π_2 est aussi égal à 0_D .

Si $\pi_1 \neq 0_D$, c'est-à-dire $\alpha = N(a)$, $\beta = N(b)$, $\gamma = N(c)$, $bc \neq 0$ et $a(bc) \neq 0$ donc $\pi_1 = N(a(bc))$, l'associativité de la multiplication dans A prouve que l'on a aussi $ab \neq 0$ et $(ab)c \neq 0$ donc $\pi_2 = N((ab)c) = N(a(bc)) = \pi_1$.

La commutativité de la multiplication définie sur $\mathfrak{M}'$ résulte des conditions (C.V.1) et (C.V.2).

Montrons que $\mathfrak{M}'$ muni de la multiplication et de l'ordre définis comme précédemment est un demi-groupe totalement ordonné. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathfrak{M}'$ tels que $\alpha \leq \beta$. On compare les produits $\pi_1 = \gamma * \alpha$ et $\pi_2 = \gamma * \beta$. Si $\pi_1 = 0_D$ on a de façon évidente $\pi_1 \leq \pi_2$. Si $\pi_1 \neq 0_D$, c'est-à-dire $\alpha = N(a)$, $\gamma = N(c)$ et $ca \neq 0$ auquel cas $\pi_1 = N(ca)$, on doit aussi avoir $\beta = N(b)$ tel que $N(b) \subseteq N(a)$, car on a par hypothèse $\alpha \leq \beta$. Mais $N(b) \subseteq N(a)$ et $ca \neq 0$ entraînent $cb \neq 0$ donc $\pi_2 = N(cb)$. Le corollaire (1.3.3) et la condition (C.V.1) montrent que l'on a $N(cb) \subseteq N(ca)$, autrement dit $\pi_1 = N(ca) \leq N(cb) = \pi_2$.

Compte tenu de la démonstration du premier cas, de la définition de l'ordre et de la multiplication dans $\mathfrak{M}'$, on voit sans peine que l'application $v : A \longrightarrow \mathfrak{M}'$ définie par $v(a) = N(a)$ si $a \neq 0$ et $v(a) = 0_D$ si $a = 0$ vérifie les conditions de la définition (1.1.1).

(1.3.9) Remarques. 1. La construction du deuxième cas s'applique, en réalité, au premier conduisant alors à un résultat qui ne diffère que très peu de celui du texte.

En effet, le demi-groupe est alors celui $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} \cup \{0_D\}$ du deuxième cas, $v(a)$ ayant la même valeur que dans le premier cas si $a \neq 0$ tandis que $v(0) = 0_D$ au lieu de $v(0) = A$. Ce qui implique que dans ce cas, l'image de A par v n'est pas tout le demi-groupe $D = \mathfrak{M}'$ mais $D \setminus A$, (c'est-à-dire D privé de l'élément A). On passe de cette construction à celle plus simple adoptée dans la démonstration du premier cas par l'homomorphisme de demi-groupes totalement ordonnés $j : \mathfrak{M}' = \mathfrak{M} \cup \{0_D\} \longrightarrow \mathfrak{M}$, qui est tel que $j(N(a)) = N(a)$ si $N(a)$ est différent de A et $j(A) = j(0_D) = A$.

2. Cette même construction du deuxième cas montre, sans faire appel à la théorie classique des valuations, que la réciproque du corollaire 1 (1.2.10) est fausse même pour un anneau non intègre. De façon précise, si A est un anneau valuable possédant des annulateurs propres et si v est la valuation de A définie par le théorème (1.3.1), alors pour tout annulateur propre a de A on a

$$N(a) = N(0) \text{ alors que } v(a) \text{ est différent de } v(0).$$

(1.3.10) Exemples. 1. Comme on l'a déjà vu, un anneau A sans diviseur de zéro est valable, l'ensemble $\mathfrak{M}$ se réduit dans ce cas à deux éléments : $N(o) = A$ (noté 0_D) et pour tout $a \in A$ ($a \neq o$) $N(a) = \{o\}$ (noté 1_D). On a d'ailleurs $0_D * 0_D = 0_D, 0_D * 1_D = 1_D * 0_D = 0_D, 1_D * 1_D = 1_D$. On peut donc dire que la valuation de A définie par le théorème (1.3.1) se réduit à sa valuation triviale. En particulier un anneau intègre est valable et sa valuation définie par le théorème (1.3.1) se réduit à sa valuation triviale.

2. Soit A un anneau de carré nul. A est valable car pour tout $a \in A$ on a $N(a) = A$. Le demi-groupe de valeurs de la valuation définie par le théorème (1.3.1) comporte deux éléments : $v(a) = A$ si $a \neq o$ et $v(o) = 0_D$. Mais cette fois $v(a)$ ($a \neq o$) n'est pas l'unité du demi-groupe de valeurs de la valuation considérée. En effet, quels que soient $a, b \in A, a \neq o, b \neq o$, on a $0_D = v(ab) = v(a)v(b)$.

3. Soit A un anneau unitaire, possédant des diviseurs de zéro et tel que si $a, b \in A$ sont des diviseurs de zéro on ait $ab = ba = o$. A est encore un anneau valable qui ne diffère de celui de l'exemple précédent que par l'existence d'éléments réguliers. Le demi-groupe de valeurs de la valuation obtenue par le théorème (1.3.1) comporte trois éléments : $v(a) = \{o\} = 1_D$ ou $A = 0_D$ ou l'ensemble des diviseurs de zéro de A , selon que a n'est pas diviseur de zéro, a est nul, a est un diviseur de zéro propre.

4. Soient k un corps, X, Y deux indéterminées. L'anneau $A = k[X, Y] / (X^2, XY, Y^2)$ est valable, car il ne diffère de celui de l'exemple précédent que par la commutativité. Dans le cas commutatif les conditions (C.V.1) et (C.V.2) sont automatiquement satisfaites.

5. Les données étant les mêmes que dans l'exemple précédent, l'anneau $A = k[X, Y] / (X^2, Y^2)$ n'est pas valable. En effet, $N(\bar{X})$ et $N(\bar{Y})$ ne sont pas comparables pour la relation d'inclusion, car on a $\bar{X} \in N(\bar{X}), \bar{X} \notin N(\bar{Y}),$ et $\bar{Y} \in N(\bar{Y}), \bar{Y} \notin N(\bar{X})$. Ce qui prouve que la condition (C.V.3) (théorème (1.3.1)) n'est pas satisfaite pour l'anneau A considéré.

§ (1.4) - COMPARAISON DE VALUATIONS.

(1.4) Soient A un anneau valable, v_1, v_2 deux valuations de A de demi-groupe de valeurs D_1, D_2 respectivement. On conserve ces notations dans tout le numéro.

(1.4.1) Définition. On dit que la valuation v_1 est moins fine que la valuation v_2 (en notation $v_1 \leq v_2$) si la condition suivante est satisfaite.

Quels que soient $a, b \in A$ on a $v_2(a) = v_2(b) \implies v_1(a) = v_1(b)$.

On dira que les valuations v_1 et v_2 sont équivalentes (en notation $v_1 = v_2$) si

$$v_1 \leq v_2 \text{ et } v_2 \leq v_1.$$

(1.4.2) Proposition. Les conditions suivantes sont équivalentes.

1. $v_1 \leq v_2$.

2. La correspondance $v_2(a) \rightsquigarrow v_1(a)$ est une application

qui de plus est un homomorphisme (préservant l'ordre) de D_2 sur D_1 .

Si $v_2(a) \rightsquigarrow v_1(a)$ est une application, il est clair que l'on doit avoir $v_2(a) = v_2(b) \implies v_1(a) = v_1(b)$, ce qui prouve que la condition 2 implique la condition 1. Montrons que la condition 1 implique la condition 2. D'après la condition 1, la correspondance $v_2(a) \rightsquigarrow v_1(a)$ est une application de D_2 dans D_1 . Cette application est surjective, car D_1 et D_2 sont les demi-groupes de valeurs de v_1 et v_2 respectivement. Cette application est un homomorphisme, car $v_2(a)v_2(b) = v_2(ab)$ et $v_1(ab) = v_1(a)v_1(b)$. Montrons que l'homomorphisme ainsi obtenu est un homomorphisme de demi-groupes totalement ordonnés. Pour cela, il faut montrer que l'on a $v_2(a) \leq v_2(b) \implies v_1(a) \leq v_1(b)$. On peut se borner au cas $v_2(a) < v_2(b)$, c'est-à-dire $v_2(a) \leq v_2(b)$ et $v_2(a) \neq v_2(b)$. Cela étant, si on avait $v_1(a) > v_1(b)$, on aurait aussi $v_2(a+b) = v_2(b)$ et $v_1(a+b) = v_1(a)$ ((1.1.6)). Ce qui, comme l'on a $v_1 \leq v_2$, entraîne $v_1(a) = v_1(b) < v_1(a)$. Cela étant absurde, la proposition en résulte.

(1.4.3) Corollaire. Les conditions suivantes sont équivalentes.

1. $v_1 = v_2$

2. La correspondance $v_1(a) \rightsquigarrow v_2(a)$ est une bijection qui

de plus est un isomorphisme des demi-groupes totalement ordonnés D_1 et D_2 .

(1.4.4) Remarques. Le corollaire (1.4.3) montre qu'il n'y a pas lieu de distinguer deux valuations équivalentes.

2. Le corollaire 1 (1.2.10) montre que la valuation de A définie par le théorème (1.3.1) est la moins fine de toutes les valuations de A . Cette valuation de A définie par le théorème (1.3.1) est dite alors valuation minimale de A .

3. On a vu de deux façons différentes (valuations non triviales pour les anneaux intègres qui ne sont pas des corps et valuations minimales pour les anneaux valuables possédant des annulateurs propres) que la réciproque du corollaire 1 (1.2.10) est fausse en général. Mais si A est un anneau valable possédant des diviseurs de zéro mais pas d'annulateur propre et si v désigne la valuation minimale de A , on a

$$\text{pour tout } a, b \in A, v(a) = v(b) \iff N(a) = N(b).$$

Cette équivalence reste d'ailleurs vraie dans tout anneau valable à condition de ne considérer que des éléments non nuls $a, b \in A$; par contre la méthode qui montre, dans le cas classique, l'existence de valuations non triviales (pour un anneau intègre qui n'est pas un corps) n'est pas valable (en général) pour un anneau valable possédant des diviseurs de zéro (même si l'anneau considéré est commutatif).

Cela prouve que si on énonce le corollaire 1 (1.2.10) pour la partie non nulle (seulement) d'un anneau valable possédant des diviseurs de zéro, il n'est plus évident que la réciproque du corollaire considéré (nouvelle forme) pour un anneau valable (possédant des diviseurs de zéro) donné soit fausse.

On pose donc pour les anneaux valuables possédant des diviseurs de zéro le problème de trouver un critère d'existence de valuations autres que la minimale.

Chapitre II

STRUCTURE DES ANNEAUX VALUABLES

§ 2.1) - L'ENSEMBLE DES DIVISEURS DE 0.

(2.1.1) Soit A un anneau quelconque. On désigne par Z , R , R_n , S respectivement, l'ensemble des diviseurs de zéro dans A , l'ensemble des éléments nilpotents de A , l'ensemble des $a \in A$ tels que $a^{n_1} = 0$ ($1 \leq n_1 \neq 2$), l'ensemble des $a \in A$ tels que $a^2 = 0$.

On voit que S n'est autre chose que R_2 , on a préféré cependant adopter une notation spéciale à cause du rôle particulier joué par cet ensemble. En outre on a de façon évidente

$$Z \supseteq R \supseteq R_{n_1} \supseteq R_{n_2} \quad (n_1 \geq n_2) \quad \text{et} \quad R = \bigcup_{n \geq 1} R_n.$$

(2.1.2) Définition. Soient A un anneau, a un élément nilpotent de A . On appelle ordre de nilpotence de a (en notation n_a), l'entier strictement positif tel que

$$a^q = 0 \iff q \geq n_a.$$

(2.1.3) Proposition. Soient A un anneau valuable, v une valuation de A , $s \in S$, $r_n \in R_n$ et $r_n \notin R_{n-1}$, $z \in Z$ et $z \notin R$, $a \in A$ et $a \notin Z$. Si n_1 et n_2 sont des entiers tels que $2 < n_1 < n_2$ on a

$$v(s) < v(r_{n_1}) < v(r_{n_2}) < v(z) < v(a).$$

Supposons que nous ayons $v(s) \geq v(r_{n_1})$, on aurait aussi $v(s^2) \geq v(r_{n_1}^2)$, c'est-à-dire, comme $s \in S$, $v(0) \geq v(r_{n_1}^2)$; autrement dit dans le demi-groupe de valeurs de v on aurait $0_{D(A)} \geq v(r_{n_1}^2)$, c'est-à-dire $v(r_{n_1}^2) = 0_{D(A)} \iff r_{n_1}^2 = 0$. Ce qui est absurde car $r_{n_1} \notin S$. On a donc $v(r_{n_1}) > v(s)$.

Pour montrer que l'on a $v(r_{n_1}) < v(r_{n_2})$, il suffit de reprendre la démarche précédente en remplaçant s par r_{n_1} , r_{n_1} par r_{n_2} et 2 par n_1 . De la même façon pour montrer que l'on a $v(r_{n_2}) < v(z)$, on remplace s par r_{n_2} , r_{n_1} par z et 2 par n_2 .

Comme $z \in Z$ et $a \notin Z$, il existe $x \in A$, $x \neq 0$ tel que $xz = 0$ et $xa \neq 0$. Si on avait $v(z) \geq v(a)$, on aurait aussi $v(xz) \geq v(xa)$, c'est-à-dire $0_{D(A)} \geq v(xa)$, ce qui est absurde car $xa \neq 0$. On a donc $v(z) < v(a)$, d'où la proposition.

(2.1.4) Lemme. Soit A un anneau valuable. Pour tout entier n ($n \geq 1$) on a $R_n^n = \{0\}$.

Soit n un entier tel que $n \geq 1$. On montre que tout produit $\pi = r_1 \dots r_i \dots r_n$ de n éléments de R_n est nul. En effet, A étant valuable, soit v une valuation de A . La famille $\{v(r_i), i = 1, \dots, n\}$ possède un plus grand élément, si $v(r_{i_0})$ est un plus grand élément de cette famille, on a $v(\pi) \leq v(r_{i_0}^n)$, c'est-à-dire $v(\pi) \leq 0_{D(A)}$, car $r_{i_0}^n = 0$. Ce qui prouve que $\pi = 0$. Le lemme résulte directement de ce qui précède.

(2.1.5) Lemme. Soit A un anneau valuable, pour tout entier n ($n \geq 1$) R_n est un idéal (propre) bilatère de A .

Si $r \in R_n$, pour tout $\lambda \in A$ on a $\lambda r \in R_n$ et $r \lambda \in R_n$, cela résulte de la définition de R_n et du point 2 de la proposition (1.2.2).

D'autre part, si r_1 et r_2 sont des éléments de R_n , on aura $r_1 + r_2 \in R_n$, c'est-à-dire $(r_1 + r_2)^n = 0$, cela résulte du lemme (2.1.4), pour le voir il suffit de développer $(r_1 + r_2)^n$. Ainsi R_n est un idéal bilatère de A .

Remarquons que la deuxième partie de la démonstration du lemme précédent peut se faire sans le lemme (2.1.4). Il suffit de considérer une valuation v de A et de voir que

$$v(r_1 + r_2) \leq \max[v(r_1), v(r_2)] \implies v((r_1 + r_2)^n) \leq (\max[v(r_1), v(r_2)])^n.$$

Comme r_1 et r_2 sont des éléments de R_n , on a $(\max[v(r_1), v(r_2)])^n = 0_{D(A)}$.

Ce qui entraîne $v((r_1 + r_2)^n) = 0_{D(A)}$, c'est-à-dire $(r_1 + r_2)^n = 0$ donc $r_1 + r_2 \in R_n$.

(2.1.6) Proposition. Soit A un anneau valuable. L'ensemble R des éléments nilpotents de A est un idéal bilatère de A .

La famille $\{R_n, n \geq 1\}$ est emboîtée et pour tout n ($n \geq 1$) R_n est un idéal bilatère, ce qui prouve que $R = \bigcup_{n \geq 1} R_n$ est un idéal bilatère de A .

(2.1.7) Remarque. Dans un anneau A on appelle nil-radical de A le nil-idéal bilatère maximal de A . Si l'anneau A n'est pas commutatif, le nil-radical de A peut être différent de l'ensemble R des éléments nilpotents de A qui n'est pas en général un idéal de A .

Si A est un anneau tel que l'ensemble R des éléments nilpotents de A soit un idéal bilatère de A et tel est le cas si A est un anneau valuable (proposition (2.1.6)), il est évident que dans ce cas, le nil-radical de A coïncidera avec l'ensemble R des éléments nilpotents de A .

(2.1.8) Lemme. Soit A un anneau valuable. Si x et y sont deux annulateurs mutuels dans A , on a

ou bien $x \in S$ ou bien $y \in S$.

En effet $xy = 0 \implies x \in N(y)$ et $y \in N(x)$. Si l'on avait $x \notin S$ et $y \notin S$, c'est-à-dire $x \notin N(x)$ et $y \notin N(y)$, on aurait $x \in N(y)$, $x \notin N(x)$ donc $N(y) \not\subseteq N(x)$ et $y \in N(x)$, $y \notin N(y)$ donc $N(x) \not\subseteq N(y)$, ce qui serait absurde, puisque l'ensemble des annulateurs dans un anneau valuable est totalement ordonné par inclusion.

La démonstration du lemme précédent pouvait aussi se faire de la façon suivante.

On considère une valuation v de A . On a ou bien $v(x) \leq v(y)$ ou bien $v(y) < v(x)$. Dans le premier cas on a $v(x^2) = v(x)v(x) \leq v(x)v(y) = v(xy) = 0_{D(A)}$, ce qui prouve que $x^2 = 0$, c'est-à-dire $x \in S$. Dans le second cas, on aurait de même $y^2 = 0$, autrement dit $y \in S$.

(2.1.9) Corollaire. Si A est un anneau valuable semi-simple, c'est-à-dire un anneau valuable tel que son nil-radical soit égal à l'idéal nul, alors A ne possède pas de diviseur de zéro.

§(2.2) - QUELQUES RESULTATS.

(2.2.1) Théorème. Soit A un anneau valuable. Alors

1. Il ne peut pas exister dans A deux idempotents orthogonaux et non nuls.

2. Si A est en outre unitaire, il ne contient qu'un seul idempotent qui est son unité.

Si e_1 et e_2 sont deux idempotents orthogonaux et non nuls de A , on a $e_1 e_2 = 0$, ce qui implique, d'après le lemme (2.1.8), ou bien $e_1^2 = 0$ ou bien $e_2^2 = 0$. Mais cela est absurde, car e_1 et e_2 sont des idempotents non nuls.

D'où la première partie du théorème.

Pour la deuxième partie, supposons que A possède une unité 1 ; si e , ($e \neq 0$, $e \neq 1$), est un idempotent dans A , on vérifie facilement que $(1-e)$ et e sont deux idempotents orthogonaux et non nuls. D'après la première partie, cela est impossible. L'unité 1 de A est donc son unique idempotent non nul.

(2.2.2) Le théorème (2.2.1) admet un corollaire intéressant du point de vue de la structure des anneaux valuables. De façon précise, on a

Corollaire. Si A est un anneau valable unitaire, alors A n'est pas le composé direct de sous-anneaux unitaires.

En effet, on sait qu'une telle décomposition de A nécessite l'existence d'au moins deux idempotents orthogonaux non nuls. Cette éventualité est écartée par le théorème (2.2.1).

(2.2.3) Proposition. Si A est un anneau valable, son nil-radical, qui est égal à l'ensemble R des éléments nilpotents de A , est un idéal bilatère premier.

On sait déjà que R est un idéal bilatère de A . En outre, si x et y sont des éléments de A tels que $xy \in R$, on montre que l'on a ou bien $x \in R$ ou bien $y \in R$. En effet, $xy \in R$ équivaut à l'existence d'un entier strictement positif n tel que $(xy)^n = 0$, d'après le point 2 de la proposition (1.2.2), cela équivaut à l'existence d'un entier strictement positif n tel que $x^n y^n = 0$. Le lemme (2.1.8) montre alors que ou bien $(x^n)^2 = 0$ ou bien $(y^n)^2 = 0$, c'est-à-dire $x \in R$ ou $y \in R$.

(2.2.4) Proposition. Si A est un anneau valable, l'ensemble Z des diviseurs de zéro dans A est un idéal bilatère premier.

Remarquons tout de suite que, si Z est un idéal bilatère, cet idéal bilatère est premier, car son complémentaire dans A est toujours multiplicativement stable.

Montrons que Z est un idéal bilatère. Soit $z \in Z$, pour tout $a \in A$ az et za sont dans Z , cela résulte encore du point 2 de la proposition (1.2.2).

Soient $z_1, z_2 \in Z$, d'après la proposition (1.2.9) on a ou bien $N(z_1) \subseteq N(z_2)$ ou bien $N(z_2) \subseteq N(z_1)$, on peut donc trouver $a \in A$, $a \neq 0$ tel que $a(z_1 + z_2) = 0$, c'est-à-dire $z_1 + z_2 \in Z$.

(2.2.5) Proposition. Soit A un anneau unitaire valable, si A vérifie la condition de chaîne minimale pour les idéaux unilatères, alors le nil-radical R de A est un idéal bilatère maximal et c'est le seul.

Il suffit de montrer que l'ensemble R des éléments nilpotents de A est aussi l'ensemble des éléments non inversibles de A .

Il est clair que tout élément nilpotent de A est non inversible. Pour montrer que tout élément non inversible de A est nilpotent, on considère la chaîne d'idéaux suivante : $(a) \supseteq (a^2) \supseteq \dots (a^i) \supseteq \dots$ où a est un élément non inversible de A et où les (a^i) sont considérés comme idéaux à gauche ou à droite selon le cas. Comme, par hypothèse, la condition de chaîne minimale (pour les idéaux unilatères) est satisfaite dans A , il existera un entier i ($i \geq 1$) tel que $(a^i) = (a^j)$ pour tout entier j tel que $j \geq i$. En particulier on aura $(a^i) = (a^{i+1})$, comme A est supposé unitaire, il existera un élément λ de A tel que $a^i = \lambda a^{i+1}$ ou $a^i = a^{i+1} \lambda$, c'est-à-dire $(1-\lambda a)a^i = 0$ ou $a^i(1-a\lambda) = 0$. Mais a n'est pas inversible, on a donc $(1-\lambda a)^2 = 1-2\lambda a + \lambda a \lambda a = 1-(2\lambda - \lambda a \lambda)a \neq 0$ (a n'est pas inversible à gauche) ou $(1-a\lambda)^2 = 1-2a\lambda + a\lambda a \lambda = 1-a(2\lambda - \lambda a \lambda) \neq 0$ (a n'est pas inversible à droite). Le lemme (2.1.8) montre que l'on a $(a^i)^2 = 0$, c'est-à-dire $a \in R$.

(2.2.6) Corollaire. Si dans un anneau unitaire valuable A la condition de chaîne minimale (pour les idéaux unilatères) est satisfaite, tout diviseur de zéro est nilpotent et tout élément régulier est inversible, donc A/R est un corps, en général gauche.

Remarquons que dans le cas commutatif, certains des résultats de cette partie dérivent déjà de la théorie générale des anneaux artiniens ; par exemple dans cette théorie on montre que si A est un anneau artinien, commutatif, unitaire et primaire et si R désigne le nil-radical de A , le quotient A/R est un corps. En même temps ces résultats montrent qu'un anneau artinien simple n'est valuable que s'il est un corps gauche.

En particulier, les anneaux complets de matrices carrées de rang n ($1 < n$) sur un corps gauche (c'est-à-dire les anneaux simples autres que les corps gauches) ne le sont pas.

Chapitre III

ANNEAUX NILMONIQUES ET QUASI-NILMONIQUES

§ (3.1) - DEFINITION.

(3.1.1) Soient A un anneau, α un idéal bilatère de A . Pour tout $a \in A$ on note $\bar{a}$ la classe $a + \alpha$ de a (mod. α). De façon générale si B est un sous-ensemble de A , $\bar{B}$ désigne l'ensemble $\{\bar{a}, a \in B\}$.

Si A contient un sous-anneau de représentants de A/α , autrement dit s'il existe un sous-anneau A' de A tel que $\bar{A}' = \bar{A}$ et deux éléments distincts de A' ne soient pas congrus (mod. α), il est clair que l'on a

$$A = A' \oplus \alpha \text{ (somme directe en tant que } A'\text{-modules.)}$$

(3.1.2) Soient A un anneau valuable et possédant des diviseurs de zéro, R l'idéal bilatère des éléments nilpotents de A (proposition (2.1.6)). On sait que R n'est pas réduit à l'idéal nul (lemme (2.1.8)).

D'après (3.1.1), si A contient un sous-anneau A' de représentants de A/R , on a

$$A = A' \oplus R \text{ (somme directe en tant que } A'\text{-modules.)}$$

L'anneau A étant supposé valuable, le quotient A/R ne possède pas de diviseur de zéro, car l'idéal bilatère R est premier (proposition (2.2.3)).

Si en outre on suppose que tout diviseur de zéro dans A est nilpotent, ce qui est le cas pour les anneaux artiniens valuables (corollaire (2.2.6)), on voit que R est un A' -module sans torsion.

Ainsi si l'on cherche à caractériser, parmi les anneaux A d'un certain type, ceux qui sont valuables ou si l'on cherche à étudier les anneaux valuables de ce type, il suffira de se borner aux anneaux où le nil-radical coïncide avec l'ensemble R des éléments nilpotents de A et A/R ne possède pas de diviseur de zéro.

(3.1.3) Définition. Soient A un anneau, R l'ensemble des éléments nilpotents de A . On dit que A est un anneau représentable, si les conditions suivantes sont satisfaites.

1. R est un idéal bilatère premier (propre) de A .
2. L'anneau A contient un sous-anneau de représentants de A/R .

(3.1.4) Sauf mention expresse du contraire, les anneaux A que l'on considère dans la suite sont supposés représentables, commutatifs et unitaires, donc de la forme

$A = A' \oplus R$, somme directe en tant que A' -modules où A' est un anneau intègre et où R est l'ensemble des éléments nilpotents de A , qui est une A' -algèbre.

Proposition. Soient A un anneau commutatif unitaire, R l'idéal des éléments nilpotents de A . Si A' est un sous-anneau de A tel que l'on ait $A = A' \oplus R$, somme directe en tant que A' -modules, alors A' est un anneau unitaire et son unité est la même que celle de A . En particulier si $A = A' \oplus R$ est un anneau représentable, l'unité de A' est la même que celle de A .

Si 1_A désigne l'unité de A , il suffit de montrer que 1_A est un élément de A' . Par hypothèse on a $1_A = a' + r$ ($a' \in A', r \in R$), par suite il existe un entier n , strictement positif, tel que $(1_A - a')^n = 0$. Ce qui, en développant, montre que 1_A est une somme d'éléments du sous-anneau A' , donc $1_A \in A'$.

(3.1.5) Si A est un anneau et si E est une A -algèbre, on appellera système de générateurs de E en tant que A -algèbre, une famille $e = (e_i, i \in I)$ d'éléments de E telle que E soit la plus petite A -algèbre contenant e .

Un système de générateurs $e = (e_i, i \in I)$ sera dit base de E en tant que A -algèbre, si en outre e est libre quand on considère E comme A -module.

Soient $A = A' \oplus R$ un anneau représentable et $\xi = (\xi_\tau, \tau \in T)$ un système de générateurs de R en tant que A' -algèbre. Faisons correspondre à chaque ξ_τ une indéterminée X_τ et soit $X = (X_\tau, \tau \in T)$. On désigne par $(A'[X])_n$ (n entier positif) l'anneau des polynômes $f(X)$ par rapport aux indéterminées X_τ , à coefficients dans A' , tels que les monômes de $f(X)$ soient de degré total au moins égal à n ; $(A'[X])_0$ n'est autre chose que $A'[X]$.

Soit $f(X)$ un polynôme de $A'[X]$, si $f(\xi)$ désigne la valeur de ce polynôme pour les valeurs $X_\tau = \xi_\tau$ des indéterminées, il est bien connu que l'application $h : f(X) \longrightarrow f(\xi)$ est un homomorphisme de $A'[X]$ sur $A = A' \oplus R$ par rapport à leurs structures de A' -algèbres. Si $\mathfrak{J} = \ker(h)$ désigne le noyau de cet homomorphisme, on a

$$A \cong A'[X]/\mathfrak{J} \quad \text{et} \quad R = h.(A'[X])_1.$$

Pour un système de générateurs ξ donné, l'anneau $A'[X]$ est dit l'anneau de polynômes associé par rapport à ξ à l'anneau représentable A , l'idéal $\mathfrak{J}$ étant dit son idéal d'annulation associé par rapport à ξ . Si aucune confusion n'est à craindre, on dira tout simplement anneau de polynômes associé et idéal d'annulation associé.

(3.1.6) Remarque. Les notations précédentes étant conservées, il est clair que $A = A'[X]/\mathfrak{J}$ est un anneau représentable tel que : tout diviseur de zéro dans A soit nilpotent, le nil-radical R de A soit engendré, en tant qu'idéal de A ,

par les $X_\tau + \mathfrak{J}$ ($\tau \in T$) supposés non nuls et A' soit un anneau de représentants de A/R , si et seulement si $\mathfrak{J}$ est un idéal primaire appartenant à l'idéal premier $\mathfrak{P}_T = (\{X_\tau, \tau \in T\})$ engendré dans $A'[X]$ par les X_τ ($\tau \in T$).

Si A' est un anneau intègre et si $X = \{X_\tau, \tau \in T\}$ est une famille d'indéterminées, $\mathfrak{P}_T$ désignera toujours l'idéal premier engendré dans $A'[X]$ par les X_τ ($\tau \in T$).

(3.1.7) Soit $A = A' \oplus R$ un anneau représentable. Le critère de valuabilité des anneaux s'exprime de façon simple au moyen de son anneau de polynôme associé $A'[X]$ et de son idéal d'annulation associé $\mathfrak{J}$. De façon précise, on a Proposition. L'anneau représentable $A = A'[X]/\mathfrak{J}$ est valable, si et seulement si la condition suivante est satisfaite.

Il n'existe pas de quadruple $(f_1(X), f_2(X), g_1(X), g_2(X))$ de polynômes appartenant à $A'[X]$ tels que $f_1(X)g_1(X) \in \mathfrak{J}$, $f_1(X)g_2(X) \notin \mathfrak{J}$ et $f_2(X)g_1(X) \notin \mathfrak{J}$, $f_2(X)g_2(X) \in \mathfrak{J}$.

En effet, s'il existe un tel quadruple, cela signifie que $f_1(\xi)g_1(\xi) = 0, f_1(\xi)g_2(\xi) \neq 0$ et $f_2(\xi)g_1(\xi) \neq 0, f_2(\xi)g_2(\xi) = 0$. C'est-à-dire $f_1(\xi) \in N(g_1(\xi)), f_1(\xi) \notin N(g_2(\xi))$ et $f_2(\xi) \notin N(g_1(\xi)), f_2(\xi) \in N(g_2(\xi))$, ce qui prouve que l'on n'a ni $N(g_1(\xi)) \subseteq N(g_2(\xi))$ ni $N(g_2(\xi)) \subseteq N(g_1(\xi))$.

Inversement, si pour un couple $g_1(X), g_2(X)$ d'éléments de $A'[X]$ on n'a aucune des deux dernières inclusions, cela veut dire qu'on peut trouver $f_1(X), f_2(X) \in A'[X]$ tels que $f_1(\xi) \in N(g_1(\xi)), f_1(\xi) \notin N(g_2(\xi))$ et $f_2(\xi) \in N(g_2(\xi)), f_2(\xi) \notin N(g_1(\xi))$, autrement dit, le quadruple $(f_1(X), f_2(X), g_1(X), g_2(X))$ vérifie la négation de la condition énoncée dans la proposition.

Remarque. La proposition précédente n'est autre chose qu'une traduction de la condition (C.V.3) du théorème (1.3.1), les conditions (C.V.1) et (C.V.2) étant automatiquement satisfaites puisque l'anneau A est supposé commutatif.

(3.1.8) La proposition (3.1.7) se met sous la forme visiblement équivalente suivante.

Proposition. L'anneau représentable $A = A'[X]/\mathfrak{J}$ est valable, si et seulement si la condition suivante est satisfaite.

Quels que soient $g_1(X), g_2(X) \in A'[X]$, s'il existe $f_1(X) \in A'[X]$ tel que $f_1(X)g_1(X) \in \mathfrak{J}$ et $f_1(X)g_2(X) \notin \mathfrak{J}$, alors pour tout $f_2(X) \in A'[X]$ on a $f_2(X)g_1(X) \notin \mathfrak{J} \implies f_2(X)g_2(X) \notin \mathfrak{J}$.

(3.1.9) Soient $A'[X]$ un anneau de polynômes (en particulier un anneau de polynômes associé à un anneau représentable), $\mathfrak{J}$ un idéal de $A'[X]$. On dit que $\mathfrak{J}$ est un V-idéal de $A'[X]$, si les conditions énoncées dans la proposition (3.1.7) (et la proposition (3.1.8)) sont satisfaites.

Si $A'[X]$ est un anneau de polynômes associé à un anneau représentable $A = A' \oplus R$ et si l'idéal $\mathfrak{J}$ de $A'[X]$ est l'idéal d'annulation associé à A , il est clair que

$A'[X]/\mathfrak{J}$ est valable, si et seulement si $\mathfrak{J}$ est un V-idéal de $A'[X]$.

Dans ce qui va suivre, les V-idéaux d'un anneau de polynômes seront caractérisés surtout par la condition énoncée dans la proposition (3.1.7).

(3.1.10) Soient A un anneau commutatif, α un idéal de A . Pour tout $a \in A$ on désigne par $N_\alpha(a)$ l'ensemble des annulateurs (mod. α) de a .

$\mathfrak{N}_\alpha$ désignera la famille $\{N_\alpha(a), a \in A\}$.

Dans un anneau de polynômes $A'[X]$, où A' est un anneau et $X = \{X_\tau, \tau \in T\}$, la décomposition d'un polynôme $f(X) \in A'[X]$ en monômes deux à deux non semblables est notée de la façon suivante.

$$f(X) = \sum_{i \in N^T} a_i X^i \text{ où les } a_i \in A' \text{ sont tous nuls sauf un nombre fini,}$$

les i étant des éléments de N^T (N désigne l'ensemble des entiers naturels) à composantes presque toutes nulles.

Autrement dit, $\prod_{\tau \in T} X_\tau^{i_\tau}$ sera noté X^i où $i : \tau \longrightarrow i_\tau$ est une

application de T dans N .

Si $j : \tau \longrightarrow j_\tau$ est une autre application de T dans N , alors $i+j$ désigne l'application $\tau \longrightarrow i_\tau + j_\tau$ de T dans N .

(3.1.11) Lemme. Soient A un anneau commutatif, α un idéal de A tel que la famille $\mathfrak{N}_\alpha = \{N_\alpha(a), a \in A\}$ ((3.1.10)) soit totalement ordonnée par inclusion. Si c et d sont des éléments de A tels que $N_\alpha(c) \not\subseteq N_\alpha(d)$, on a $N_\alpha(c+d) = N_\alpha(c) \cap N_\alpha(d)$.

Comme par hypothèse la famille $\mathfrak{N}_\alpha$ est totalement ordonnée par inclusion et $N_\alpha(c) \not\subseteq N_\alpha(d)$, on peut supposer, sans perdre de généralité, que l'on a $N_\alpha(c) \subset N_\alpha(d)$.

Ce qui implique $N_0(c+d) = N_0(d) \cap N_a(c+d) \subseteq N_a(c) = N_a(c) \cap N_a(d) \subseteq N_a(c+d)$.
D'où le lemme.

Remarquons que, si on considère la valuation minimale de l'anneau $A/\mathfrak{a}$ qui est valable (A est commutatif et la famille $\mathfrak{N}_a$ est totalement ordonnée par inclusion), le lemme précédent résulte directement de (1.1.5).

(3.1.12) Proposition. Soient A' un anneau intègre, $X = \{X_\tau, \tau \in T\}$. On considère l'anneau $A'[X]$. Si $\mathfrak{J}$ est un V -idéal de $A'[X]$ tel que $\mathfrak{J}$ soit engendré uniquement par des monômes unitaires et si

$f(X) = \sum_{i \in N^T} a_i X^i$ et $g(X) = \sum_{j \in N^T} b_j X^j$ ((3.1.10)) sont des éléments de $A'[X]$, on a

$g(X)f(X) \in \mathfrak{J} \iff$ quels que soient $i, j \in N^T$ tels que $a_i \neq 0$ et $b_j \neq 0$ on a $X^{i+j} \in \mathfrak{J}$.

L'implication de droite à gauche est évidente. Montrons l'implication dans l'autre sens.

(A) On suppose que l'on a $f(X) = X^i$ ((3.1.10)). On note

$(N^T)_1 = \{j \in N^T, b_j \neq 0, X^j X^i \notin \mathfrak{J}\}$ et $(N^T)_2$ le complémentaire (dans N^T) de $(N^T)_1$.

On peut alors écrire $g(X) = g_1(X) + g_2(X)$ où $g_1(X) = \sum_{j \in (N^T)_1} b_j X^j$ et $g_2(X) = \sum_{j \in (N^T)_2} b_j X^j$.

Comme $\mathfrak{J}$ est un idéal de $A'[X]$, on a $g(X)X^i \in \mathfrak{J} \iff g_1(X)X^i \in \mathfrak{J}$. Mais l'idéal $\mathfrak{J}$ étant engendré uniquement par des monômes unitaires, il est clair que l'on a $g_1(X)X^i \in \mathfrak{J} \iff g_1(X) \equiv 0$, ce qui prouve que $g(X)X^i \in \mathfrak{J} \iff g(X) = g_2(X)$. Autrement dit, avec les notations introduites dans (3.1.10), on a

$$N_{\mathfrak{J}}(X^i) = \{X^j, X^j X^i \in \mathfrak{J}\}.$$

(B) Supposons maintenant que $f(X) = \sum_{i \in N^T} a_i X^i$ soit un polynôme tel que

quels que soient $i_1, i_2 \in N^T$ tels que $a_{i_1} \neq 0$ et $a_{i_2} \neq 0$, on ait $N_{\mathfrak{J}}(X^{i_1}) = N_{\mathfrak{J}}(X^{i_2})$

(un tel polynôme est dit c-polynôme pour $\mathfrak{J}$). En reprenant le principe de la démonstration précédente et en posant cette fois

$(N^T)_1 = \{j \in N^T, b_j \neq 0, X^j X^{i_1} \notin \mathfrak{J}, \forall i \in N^T, a_i \neq 0\}$, on aura encore l'équivalence

$g(X)f(X) \in \mathfrak{J} \iff g_1(X)f(X) \in \mathfrak{J}$.

On peut se borner au cas $f(X) \neq 0$. Cela étant, si les monômes (en nombre fini) $b_j X^j$ (resp. $a_i X^i$ tels que $a_i \neq 0$) de $g_1(X)$ (resp. $f(X)$) sont ordonnés par rapport à l'ordre lexicographique de leurs indices j (resp. i) dans N^T , les conditions : A' intègre et l'idéal $\mathfrak{J}$ est engendré uniquement par des monômes unitaires entraînent $g_1(X)f(X) \in \mathfrak{J} \iff g_1(X) \equiv 0$, donc $g(X) = g_2(X)$, ce qui prouve que, si $f(X)$ est un c-polynôme pour $\mathfrak{J}$, on a

$$N_{\mathfrak{J}}(f(X)) = (\{X^j, X^j X^i \in \mathfrak{J}, \forall i \in N^T, a_i \neq 0\}).$$

(C) Dans le cas où $f(X)$ est un polynôme quelconque de $A'[X]$, on peut toujours écrire $f(X) = \sum_{n \in N} f_n(X)$ de telle sorte que, 1° - Pour tout $n \in N$ le polynôme $f_n(X)$ soit un c-polynôme pour $\mathfrak{J}$. 2° - Quels que soient $n_1, n_2 \in N$, et $n_1 \neq n_2$ on ait $N_{\mathfrak{J}}(f_{n_1}(X)) \neq N_{\mathfrak{J}}(f_{n_2}(X))$. 3° - Tous les $f_n(X)$ soient identiquement nuls sauf un nombre fini. Comme par hypothèse $\mathfrak{J}$ est un V-idéal, donc l'ensemble $\mathfrak{N}_{\mathfrak{J}}$ est totalement ordonné par inclusion, le lemme (3.1.11) montre, par récurrence sur le nombre des $f_n(X)$ non nuls, que l'on a

$$N_{\mathfrak{J}}(f(X)) = \bigcap_{n \in N, f_n(X) \neq 0} (N_{\mathfrak{J}}(f_n(X))).$$

La proposition résulte directement de ce qui précède.

(3.1.13) Définition. Soit $A = A' \oplus R$ un anneau représentable. On dit que A est quasi-nilmonique (resp. nilmonique), s'il existe un système de générateurs $\xi = \{\xi_{\tau}, \tau \in T\}$ de la A' -algèbre R tel que, dans l'anneau de polynômes $A'[X]$ ($X = \{X_{\tau}, \tau \in T\}$) associé à A , l'idéal d'annulation $\mathfrak{J}$ associé à A soit engendré uniquement par des monômes (resp. monômes unitaires).

Par abus de langage, un tel système de générateurs de la A' -algèbre R sera dit base de quasi-nilmonicité (resp. nilmonicité) de A .

Il est facile de voir qu'un tel système de générateurs est minimal. En outre dans le cas nilmonique, il est libre (R est considéré comme A' -module).

Soient $A = A' \oplus R$ un anneau quasi-nilmonique (resp. nilmonique), $\xi = \{\xi_{\tau}, \tau \in T\}$ une base de quasi-nilmonicité (resp. nilmonicité) de A . Si $A'[X]$ et $\mathfrak{J}$ désignent l'anneau de polynômes et l'idéal d'annulation associés à A , il est clair que $f(X) = \sum_{i \in N^T} a_i X^i \in A'[X]$ est un élément de $\mathfrak{J}$, si et seulement si, pour tout $i \in N^T$ tel que $a_i \neq 0$, on a $a_i X^i \in \mathfrak{J}$ (resp. $X^i \in \mathfrak{J}$).

§ (3.2) - SYSTEME DE GENERATEURS DE CERTAINS ANNEAUX NILMONIQUES ET QUASI-NILMONIQUES.

(3.2.1) Soit $A = A' \oplus R$ un anneau représentable. Si R est nilpotent et n'est pas réduit à l'idéal nul (tel est par exemple le cas des anneaux valuables qui possèdent des diviseurs de zéro et de plus sont artiniens), le A' -module R/R^2 n'est pas réduit au module nul.

En effet, on ne peut pas avoir $R \subseteq R^2$, car autrement on aurait, pour tout $n \geq 2$, $R \subseteq R^n$ et R serait l'idéal nul contrairement à l'hypothèse.

Soit donc $\bar{\xi} = \{\bar{\xi}_\tau, \tau \in T\}$ un système de générateurs du A' -module R/R^2 et soit $\xi = \{\xi_\tau, \tau \in T\}$ un système de représentants des $\bar{\xi}_\tau$. On considère $A'[\xi]$ l'anneau engendré par ξ sur A' . Il est clair que l'on a $R = (A'[\xi])_1 + R^2$ ce qui entraîne $(A'[\xi])_1 \subseteq R$ et plus généralement $(A'[\xi])_n \subseteq R^n$ où n est un entier positif, avec la convention $R^0 = A$.

Par suite, $(A'[\xi])_i R^j = (A'[\xi])_i [(A'[\xi])_1 + R^2] R^{j-1} = (A'[\xi])_i (A'[\xi])_1 R^{j-1} + (A'[\xi])_i R^{j+1} \subseteq (A'[\xi])_{i+1} R^{j-1} + (A'[\xi])_i R^{j+1} \subseteq (A'[\xi])_{i+1} R^{j-1} + R^{i+j+1}$. Par récurrence on aura

$$(A'[\xi])_i R^j \subseteq (A'[\xi])_{i+j} R^{i+j+1}.$$

Supposons que nous ayons $R = (A'[\xi])_1 + R^i$, on aura aussi

$$R = (A'[\xi])_1 + [(A'[\xi])_1 + R^2] R^{i-1} = (A'[\xi])_1 + (A'[\xi])_1 R^{i-1} + R^{i+1} \subseteq (A'[\xi])_1 + (A'[\xi])_1 R^{i+1} + R^{i+1} \subseteq (A'[\xi])_1 + R^{i+1}.$$

$$R = (A'[\xi])_1 + R^n \text{ quel que soit l'entier strictement positif } n.$$

Comme R est nilpotent, l'égalité précédente (qui résulte de $R = (A'[\xi])_1 + R^2$) prouve que l'on a $R = (A'[\xi])_1$. On peut donc énoncer la proposition suivante.

Proposition. Soit $A = A' \oplus R$ un anneau représentable tel que la A' -algèbre R soit nilpotente. Si $\bar{\xi} = \{\bar{\xi}_\tau, \tau \in T\}$ est un système de générateurs (resp. une base) du A' -module R/R^2 , alors tout système de représentants $\xi = \{\xi_\tau, \tau \in T\}$ de $\bar{\xi}$ est un système de générateurs (resp. une base) de la A' -algèbre R .

En effet, dans le cas où $\bar{\xi}$ est une base, ξ est libre sur A' . La proposition résulte alors de ce qui précède.

(3.2.2) Si $A = A' \oplus R$ est un anneau représentable tel que l'idéal R soit nilpotent, la proposition (3.2.1) nous donne un moyen d'obtenir des systèmes de générateurs (non triviaux) de la A' -algèbre R . Si R/R^2 est un A' -module libre, la proposition rappelée nous permet d'obtenir des bases de la A' -algèbre R . Dans le cas où A est un anneau nilmonique, on montre que toute base de nilmonicité de A est ainsi obtenue. De façon précise, on a

Proposition. Si $A = A' \oplus R$ est un anneau nilmonique et si $\xi = \{\xi_\tau, \tau \in T\}$ est une base de nilmonicité de A , alors le A' -module R/R^2 est libre de base $\bar{\xi} = \{\bar{\xi}_\tau, \tau \in T\}$ ($\bar{\xi}_\tau$ désigne la classe $\xi_\tau + R^2 \pmod{R^2}$ de ξ_τ).

En effet, supposons qu'il existe des $\alpha \in A'$ tels que $\sum_{\tau \in T} \alpha_\tau \xi_\tau \in R^2$ et

l'ensemble $\{\tau \in T, \alpha_\tau \neq 0\}$ soit fini et non vide. Il existerait donc des couples (μ_q, ν_q) où q parcourt un ensemble fini $\{1, 2, \dots, m\}$ d'indices et où pour tout q, μ_q et ν_q sont des éléments de R tels que $\sum_{\tau \in T} \alpha_\tau \xi_\tau - \sum_{q=1}^m \mu_q \nu_q = 0$. Chaque μ_q et chaque ν_q appartient à $(A[\xi])_1$, par suite $\sum_{q=1}^m \mu_q \nu_q$ appartient à $(A'[\xi])_2$.

Comme ξ est une base de nilmonicité de A , l'égalité précédente prouve que pour tout $\tau \in T$ on a $\alpha_\tau \xi_\tau = 0$ donc $\alpha_\tau = 0$, ce qui est absurde, car on a supposé que l'ensemble $\{\tau \in T, \alpha_\tau \neq 0\}$ était fini et non vide. On a ainsi prouvé que les $\bar{\xi}_\tau = \xi_\tau + R^2$ forment un ensemble libre d'éléments du A' -module R/R^2 .

Cet ensemble libre est aussi une base. En effet, on a $R = (A'[\xi])_1$ et $(A'[\xi])_2 \subseteq R^2$, ce qui prouve que les ξ_τ constituent un système de générateurs du A' -module R/R^2 . D'où la proposition.

(3.2.3) Si $A = A' \oplus R$ est un anneau représentable, le sous-anneau intègre A' de A est tel qu'il existe un homomorphisme de A' dans un corps (par exemple dans son corps de fractions).

Cela entraîne que deux bases d'un A' -module libre sont équipotentes. La proposition (3.2.2) permet alors de donner la définition suivante.

Définition. Soit $A = A' \oplus R$ un anneau nilmonique. On appelle rang de nilmonicité de A , le cardinal d'une base de nilmonicité de A , qui est égal, d'après la proposition (3.2.2), au cardinal d'une base du A' -module libre R/R^2 .

(3.2.4) Soit $A = A' \oplus R$ un anneau nilmonique. On appelle rang de nilmonicité de A , le cardinal d'une base de nilmonicité de A , qui est égal, d'après la proposition (3.2.2), au cardinal d'une base du A' -module libre R/R^2 .

(3.2.4) Soit $A = A' \oplus R$ un anneau nilmonique de rang de nilmonicité s ($1 \leq s < \infty$). Si $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_t, \dots, \xi_s\}$ et $\xi' = \{\xi'_1, \dots, \xi'_t, \dots, \xi'_s\}$ sont deux bases de nilmonicité de A , on considère les suites $(n_t = n(\xi_t), t = 1, 2, \dots, s)$, $(n'_t = n(\xi'_t), t = 1, 2, \dots, s)$, supposées non croissantes, des ordres de nilpotence des éléments de ξ et ξ' . On a

Proposition. Si l'anneau nilmonique A est valable, les suites $(n_t, t=1, 2, \dots, s)$ et $(n'_t, t=1, 2, \dots, s)$ précédentes coïncident. Autrement dit, pour tout t ($1 \leq t \leq s$) on a

$$n_t = n'_t.$$

Comme $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_t, \dots, \xi_s\}$ et $\xi' = \{\xi'_1, \dots, \xi'_t, \dots, \xi'_s\}$ sont deux bases de nilmonicité de A , (si pour tout $a \in A$ $\bar{a}$ désigne la classe de $a \pmod{R^2}$), la proposition (3.2.2) montre que $\bar{\xi} = \{\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_t, \dots, \bar{\xi}_s\}$ et

$\bar{\xi}' = \{\bar{\xi}'_1, \dots, \bar{\xi}'_t, \dots, \bar{\xi}'_s\}$ sont deux bases du A' -module libre R/R^2 donc pour tout t ($1 \leq t \leq s$) on a

$$\xi'_t = \sum_{r=1}^s a_{t,r} \xi_r + f_t(\xi)$$

où les $a_{t,r} \in A'$ sont tels que la matrice $\|a_{t,r}\|$ soit inversible, les deux bases jouent alors des rôles symétriques et on a $f_t(\xi) \in (A'[\xi])_2 = (A'[\xi'])_2$.

Par suite, pour tout entier strictement positif n , on aura

$$(1) \quad \xi_t'^n = \sum_{r=1}^s a_{t,r}^n \xi_r^n + g_{t,n}(\xi)$$

où $g_{t,n}(\xi) \in A'[\xi]$ est tel que pour tout r ($1 \leq r \leq s$) le degré de $g_{t,n}(\xi)$ par rapport à ξ_r soit différent de n .

$$(2) \quad \xi_t'^n = \left(\sum_{r=1}^s a_{t,r} \xi_r \right)^n + g'_{t,n}(\xi)$$

où $g'_{t,n}(\xi) \in (A'[\xi])_{n+1} = (A'[\xi'])_{n+1}$.

Cela étant, si $\xi_t'^n = 0$, l'égalité (1), compte tenu de la nilmonicité de ξ et de l'intégrité de A' , montre que $\xi_r^n = 0$ pour tout r tel que $a_{t,r} \neq 0$.

Ce qui prouve que pour tout r tel que $1 \leq r \leq s$ et $a_{t,r} \neq 0$ on a $n'_t \geq n_r$.

En particulier, on aura

$$(3) \quad n'_t \geq \max_{\substack{1 \leq r \leq s \\ a_{t,r} \neq 0}} (n_r).$$

D'autre part, si n est un entier tel que $n \geq \max_{\substack{1 \leq r \leq s \\ a_{t,r} \neq 0}} (n_r)$, alors pour tout r

tel que $1 \leq r \leq s$ et $a_{t,r} \neq 0$ on a $\xi_r \in R_n$. Comme l'anneau nilmonique A est supposé valuable, R_n est un idéal bilatère de A , ce qui prouve que la somme

$$\sum_{r=1}^s a_{t,r} \xi_r \text{ est dans } R_n.$$

L'égalité (2) entraîne $\xi_t^n = g_{t,n}'(\xi)$ donc $\xi_t^n = 0$, car ξ' est une base de nilmonicité de A et $g_{t,n}'(\xi) \in (A'[\xi])_{n+1} = (A'[\xi'])_{n+1}$. On a ainsi montré que

$$(4) \quad n_t' \leq \max_{\substack{1 \leq r \leq s \\ a_{t,r} \neq 0}} (n_r) \text{ pour tout } t \ (1 \leq t \leq s).$$

Les égalités (3) et (4) montrent que l'on a

$$(5) \quad n_t' = \max_{\substack{1 \leq r \leq s \\ a_{t,r} \neq 0}} (n_r) \text{ pour tout } t \ (1 \leq t \leq s).$$

Soit k un entier tel que $k > 1$. On désigne par $d(k)$ (respectivement $d'(k)$) le nombre de ξ_t (respectivement ξ_t') tels que $n(\xi_t) \leq k$ (respectivement $n(\xi_t') \leq k$). Comme ξ et ξ' sont des bases de nilmonicité de A, donc des ensembles libres sur A' , l'égalité (5) montre que l'on a $d'(k) \leq d(k)$, les bases de nilmonicité ξ et ξ' jouant des rôles symétriques, on aura aussi $d(k) \leq d'(k)$ donc pour tout entier $k > 1$ on a

$$(6) \quad d(k) = d'(k).$$

Les suites $(n_t = n(\xi_t), t = 1, 2, \dots, s)$ et $(n_t' = n(\xi_t'), t = 1, 2, \dots, s)$ étant supposées non croissantes, pour tout entier t tel que $1 \leq t \leq s$ on montre que l'on a $n_t = n_t'$. En effet, si on avait $n_t \neq n_t'$, on aurait par exemple $n_t < n_t'$. Mais si on pose $k = n_t' - 1$, on aura (de façon évidente) $d(k) > d'(k)$. De la même façon si on avait $n_t' < n_t$, en posant $k = n_t - 1$, on aurait $d'(k) > d(k)$. Comme l'entier k considéré dans les deux cas précédents est au moins égal à 1, l'égalité (6) montre que $n_t \neq n_t'$ mène à une contradiction. La proposition résulte de ce qui précède.

On peut donner la définition suivante.

Définition. Soit A un anneau nilmonique de rang de nilmonicité $s \ (1 \leq s < \infty)$.

On appelle suite de nilpotence de A et l'on note $S(\bar{A})$, la suite

$(n_t = n(\xi_t), t = 1, 2, \dots, s)$ supposée non croissante des ordres de nilpotence des éléments d'une base de nilmonicité $\xi = \{\xi_t, t = 1, 2, \dots, s\}$ de A.

(3.2.5) Soit A un anneau représentable. On sait que A' est un anneau intègre dont l'unité coïncide avec celle de A et R est une A' -algèbre. Si R en tant que A' -module est sans torsion, autrement dit si $Z = R$, et tel est le cas des anneaux nilmoniques, soit k le corps de fractions de A' . On peut plonger la A' -algèbre $A = A' \oplus R$ dans la k -algèbre $A^* = k \otimes_{A'} A$. On sait que A^* est isomorphe (en tant que k -module) à $k \oplus kR$ où kR désigne l'ensemble des éléments

de la forme λr ($\lambda \in k, r \in R$). Il est clair que $R^* = kR$ qui est le nil-radical de A^* , est nilpotent si et seulement si R est nilpotent. On a ainsi montré que tout anneau représentable $A = A' \oplus R$ tel que R soit un A' -module sans torsion peut être plongé de façon canonique dans un anneau représentable $A^* = k \oplus R^*$ où k est un corps et le nil-radical R^* de A^* est nilpotent si et seulement si R est nilpotent.

Comme le corps k qui figure dans la décomposition de l'anneau représentable A^* est le corps de fractions de l'anneau intègre A' , il est clair que pour toute famille finie $(\lambda_t, t=1,2,\dots,s)$ d'éléments λ_t appartenant à k , on peut trouver un élément $a(\lambda_t, t=1,2,\dots,s)$ de A' tel que pour tout t ($1 \leq t \leq s$) on ait $a(\lambda_t, t=1,2,\dots,s)\lambda_t \in A'$. Ce qui prouve que

L'anneau représentable A est valuable si et seulement si l'anneau représentable A^* est valuable.

et

Si l'anneau représentable A est nilmonique, alors l'anneau représentable A^* est aussi nilmonique, en outre une base de nilmonicité de A est encore une base de nilmonicité de A^* .

Ce qui prouve que pour l'étude de la valuabilité des anneaux nilmoniques $A = A' \oplus R$, on peut se ramener au cas où A' est un corps. Il suffira pour cela de considérer l'anneau représentable A^* .

§ (3.3) - MONOMES LIMITES ET GENERATEURS D'UN V-IDEAL. UN CAS PARTICULIER.

(3.3.1) Soient A un anneau représentable, $\xi = \{\xi_\tau, \tau \in T\}$ un système de générateurs (que l'on peut choisir minimal par exemple dans le cas des anneaux nilmoniques, proposition (3.2.2)) de la A' -algèbre R . Si $X = \{X_\tau, \tau \in T\}$, soient $A'[X]$ et $\mathfrak{J}$ l'anneau de polynômes associé à A et l'idéal d'annulation associé à A . D'après (3.1.5) on a $A' \oplus R \cong A'[X]/\mathfrak{J}$ où R en tant qu'idéal de $A'[X]/\mathfrak{J}$ est engendré par les $X_\tau + \mathfrak{J}$ et A' est un sous-anneau de représentants de $A' \oplus R/R$. Si A est nilmonique, la remarque (3.1.6) montre que $\mathfrak{J}$ est un idéal $\mathfrak{P}_T$ -primaire.

Dans tout ce qui va suivre, sauf mention expresse du contraire, $\mathfrak{J}$ désignera un idéal $\mathfrak{P}_T$ -primaire de $A'[X]$ où $X = \{X_\tau, \tau \in T\}$. Cela étant, il est clair que pour tout $\tau \in T$, il existe un entier n tel que $X_\tau^{n\tau} \in \mathfrak{J}$, on choisira cet entier le plus petit possible et n_τ sera alors l'ordre de nilpotence de ξ_τ , c'est-à-dire l'ordre de nilpotence (mod. $\mathfrak{J}$) de X_τ .

Cela prouve que l'ensemble des monômes de $\mathcal{J}$ n'est pas vide. On note $M^*(\mathcal{J})$ (respectivement $M(\mathcal{J})$) l'ensemble des monômes (respectivement monômes unitaires) de $\mathcal{J}$. De façon analogue, $M^*(A'[X])$ (respectivement $M(A'[X])$) désigne l'ensemble des monômes (respectivement monômes unitaires) de $A'[X]$. On a les inclusions évidentes suivantes.

$$M(\mathcal{J}) \subseteq M^*(\mathcal{J}) \subseteq M^*(A'[X]), \quad M(A'[X]) \subseteq M^*(A'[X]), \quad M(\mathcal{J}) \subseteq M(A'[X]).$$

(3.3.2) On désigne par e_τ ($\tau \in T$) le point de N^T dont toutes les composantes sont nulles, sauf celle d'indice τ , qui est égale à 1. De sorte que si $j \in N^T$ alors $j - e_\tau$ désigne le point de N^T dont les composantes sont les mêmes que celles de j , sauf celle d'indice τ , qui est inférieure de 1 à la composante de j de même indice.

(3.3.3) Puisque l'unité de A' , qui est la même que celle de A (proposition (3.1.4)), n'appartient pas à $\mathcal{J}$, on voit que pour tout $i \in N^T$, on a

$$X^i \in M(\mathcal{J}) \implies \text{il existe } \tau \in T \text{ tel que } i_\tau \geq 1$$

(3.3.4) Définition. Soit $X^i \in M(A'[X])$. On appelle, par abus de langage, support de X^i le sous-ensemble $\text{Supp}(X^i)$ de T tel que : $i_\tau \neq 0 \iff \tau \in \text{Supp}(X^i)$.

(3.3.5) Définition. Soit $X^i \in M(\mathcal{J})$. On dit que X^i est un monôme limite de $\mathcal{J}$, s'il existe $\tau \in \text{Supp}(X^i)$ tel que $X^{i-e_\tau} \notin M(\mathcal{J})$. On dira que X^i est un monôme générateur de $\mathcal{J}$, si pour tout $\tau \in \text{Supp}(X^i)$ on a $X^{i-e_\tau} \notin M(\mathcal{J})$.

L'ensemble des monômes limites (respectivement générateurs) de $\mathcal{J}$ est noté $ML(\mathcal{J})$ (respectivement $MG(\mathcal{J})$).

Remarque. Pour tout $\tau \in T$ on a $X^{n_\tau} \in MG(\mathcal{J})$ en outre on a $MG(\mathcal{J}) \subseteq ML(\mathcal{J})$.

(3.3.6) La relation d'ordre produit (respectivement lexicographique) dans N^T ou dans $M(A'[X])$ est notée $\leq_p$ (respectivement $\leq_1$). Si $i, j \in N^T$ ou si $X^i, X^j \in M(A'[X])$, la notation $i <_p j$ (respectivement $i <_1 j$) ou $X^i <_p X^j$ (respectivement $X^i <_1 X^j$) conserve sa signification habituelle.

Remarque. $MG(\mathcal{J})$ est l'ensemble des éléments minimaux (pour la relation d'ordre $\leq_p$) de $M(\mathcal{J})$.

(3.3.7) Proposition. Soit $X^i \in M(A'[X])$. Les conditions suivantes sont équivalentes.

$$1^\circ X^i \in ML(\mathcal{J}).$$

$$2^\circ \text{ Il existe } X^k \in MG(\mathcal{J}) \text{ tel que } X^k \leq_p X^i.$$

Si la condition 2° est satisfaite, on a $X^k \in M(\mathfrak{J})$ et $X^i = X^{k'} X^k$ où $k' \in N^T$. Ce qui prouve que $X^i \in M(\mathfrak{J})$, car $\mathfrak{J}$ est un idéal de $A'[X]$.

Inversement, soit $X^{i_1} \in M(\mathfrak{J})$. Si $X^{i_1} \notin MG(\mathfrak{J})$, la remarque (3.3.6) montre qu'il existe $X^{i_2} \in M(\mathfrak{J})$ tel que $X^{i_2} <_p X^{i_1}$ et ainsi de suite. Mais il ne peut pas exister de suite infinie (X^{i_n}) strictement décroissante (pour la relation d'ordre $\leq_p$) telle que pour tout i_n on ait $X^{i_n} \in M(\mathfrak{J})$. D'où la proposition.

Remarque. Comme $MG(\mathfrak{J}) \subseteq ML(\mathfrak{J})$, la proposition précédente est encore vraie si on remplace $MG(\mathfrak{J})$ par $ML(\mathfrak{J})$.

(3.3.8) Pour connaître l'ensemble $M(\mathfrak{J})$, il suffit, d'après (3.3.7), de connaître son sous-ensemble $MG(\mathfrak{J})$ ou $ML(\mathfrak{J})$. En particulier, si l'anneau représentable A est nilmonique, l'idéal $\mathfrak{J}$, qui est alors engendré uniquement par des monômes unitaires, est complètement déterminé par la donnée de $MG(\mathfrak{J})$ ou $ML(\mathfrak{J})$. De façon précise, dans ce cas, on a

$$\mathfrak{J} = (MG(\mathfrak{J})) = (ML(\mathfrak{J})).$$

Cela prouve l'intérêt que l'on peut avoir à déterminer l'ensemble $MG(\mathfrak{J})$ ou $ML(\mathfrak{J})$ pour un idéal $\mathfrak{J}$ donné dans $A'[X]$; on verra, qu'en général, on a $MG(\mathfrak{J}) \neq ML(\mathfrak{J})$.

(3.3.9) Lemme. Soit $M \subseteq M(A'[X])$ ($M = \{X_\tau, \tau \in T\}$) un sous-ensemble de l'ensemble des monômes unitaires de $A'[X]$. Le sous-ensemble M est de la forme $MG(\mathfrak{J})$ (respectivement $ML(\mathfrak{J})$) où $\mathfrak{J}$ est un idéal $\mathfrak{P}_T$ -primaire dans $A'[X]$, si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites.

1° L'unité 1 de A' , qui est la même que celle de A , n'appartient pas à M .

2° Pour tout $\tau \in T$ il existe un entier unique (strictement positif) n_τ tel que $X_\tau^{n_\tau} \in M$.

3° Si $X^i \in M$, il n'existe pas de couple $(\tau, X^k) \in \text{Supp}(X^i) \times M$ tel que $X^k \leq_p X^{i-e_\tau}$ (respectivement il existe $\tau \in \text{Supp}(X^i)$ tel que, il n'existe pas $X^k \in M$ tel que $X^k \leq X^{i-e_\tau}$)

Si M est de la forme $MG(\mathfrak{J})$ (respectivement $ML(\mathfrak{J})$) où $\mathfrak{J}$ est un idéal $\mathfrak{P}_T$ -primaire dans $A'[X]$, les conditions 1°, 2° et 3° sont satisfaites de façon évidente.

Supposons inversement que M soit un sous-ensemble de $M(A'[X])$ vérifiant les conditions énoncées dans le lemme. On pose $\bar{M} = \{X^i \in M(A'[X]), \text{il existe } X^k \in M, X^k \leq_p X^i\}$. Il est clair que $M \subseteq \bar{M}$ et si $X^i, X^j \in M(A'[X])$ sont tels que $X^i \in \bar{M}, X^i \leq_p X^j$ alors $X^j \in \bar{M}$. Cela étant, on considère le A' -module libre $V(\bar{M})$

de base $\bar{M}$. On montre que $V(\bar{M})$ est un idéal $\mathfrak{P}_T$ -primaire de $A'[X]$. Par hypothèse $1 \notin \bar{M}$ donc $1 \in \bar{M}$, ce qui prouve que $1 \notin V(\bar{M})$, autrement dit si $V(\bar{M})$ est un idéal de $A'[X]$, cet idéal sera propre.

Pour tout $\mu = \sum_i a_i X^i \in A'[X]$ et pour tout $v = \sum_j b_j X^j \in V(\bar{M})$ ($b_j \in A'$, $X^j \in \bar{M}$) on a $\mu v = \sum_{i,j} a_i b_j X^{i+j}$ où $a_i b_j \in A'$ (car A' est un anneau et $a_i, b_j \in A'$) et où $X^{i+j} \in \bar{M}$ (car on a $X^j \leq_p X^{i+j}$ et $X^j \in \bar{M}$). Ce qui prouve que μv appartient à $V(\bar{M})$ donc $V(\bar{M})$ est un idéal propre de $A'[X]$. La condition 2° du lemme prouve que $V(\bar{M})$ est un idéal $\mathfrak{P}_T$ -primaire. La condition 3° du lemme montre que $M = MG(V(\bar{M}))$ (respectivement $M = ML(V(\bar{M}))$). Le lemme est ainsi démontré.

(3.3.10) Le lemme (3.3.9) montre d'une part qu'à tout idéal $\mathfrak{P}_T$ -primaire de $A'[X]$ correspond un sous-ensemble $E_{\mathfrak{J}}$ de $M(A'[X])$ (vérifiant certaines conditions) et inversement, d'autre part, que la correspondance $\mathfrak{J} \longleftrightarrow E_{\mathfrak{J}}$ est biunivoque si et seulement si $\mathfrak{J}$ est engendré (dans $A'[X]$) uniquement par des monômes unitaires, tel est le cas si $\mathfrak{J}$ est l'idéal d'annulation associé à un anneau nilmonique $A = A' \oplus R$.

La caractérisation des sous-ensembles $MG(\mathfrak{J})$ ou $ML(\mathfrak{J})$ où $\mathfrak{J}$ est un idéal $\mathfrak{P}_T$ -primaire est donc une caractérisation des anneaux nilmoniques. Si, en outre, les sous-ensembles $MG(\mathfrak{J})$ ou $ML(\mathfrak{J})$ caractérisés sont tels que les familles $\mathfrak{N}_{(MG(\mathfrak{J}))}$ ou $\mathfrak{N}_{(ML(\mathfrak{J}))}$ soient totalement ordonnées par inclusion, on aura de ce fait une caractérisation des anneaux nilmoniques valables.

C'est surtout cette caractérisation des anneaux nilmoniques valables qui va nous intéresser dans toute la suite. Il convient cependant de remarquer que la caractérisation des anneaux nilmoniques valables est une étape nécessaire et importante dans la caractérisation des anneaux représentables valables généraux.

Notons que, si $\mathfrak{J}$ est un V -idéal de $A'[X]$, c'est-à-dire si $A'[X]/\mathfrak{J}$ est valable, l'ensemble $\{N_{\mathfrak{J}}(f(X)), f(X) \in A'[X]\}$ est totalement ordonné par inclusion, en particulier l'ensemble $\{N_{\mathfrak{J}}(X_\tau), \tau \in T\}$ sera totalement ordonné par inclusion.

(3.3.11) Proposition. Soit $\mathfrak{J}$ un V -idéal de $A'[X]$. Pour tout $X^i \in M(A'[X])$ les conditions suivantes sont équivalentes.

- 1° $X^i \notin M(\mathfrak{J})$
- 2° Il existe $X^k \in MG(\mathfrak{J})$ tel que $X^i <_p X^k$.

L'implication $2^\circ \implies 1^\circ$ résulte de la proposition (3.3.7) et de la remarque (3.3.6) qui montre que deux éléments distincts de $MG(\mathfrak{J})$ ne sont pas comparables pour l'ordre $\leq_p$.

Supposons inversement que nous ayons $X^i \notin M(\mathfrak{J})$. L'idéal $\mathfrak{J}$ étant $\mathbb{T}_T$ -primaire (on l'a supposé (3.3.1)), il existe $X^i 1 \in M(A'[X])$ tel que $X^i 1 \in M(\mathfrak{J})$, $X^i 1$ est maximal (pour l'ordre $\leq_p$) dans l'ensemble des éléments de $M(A'[X])$ qui ne sont pas dans $M(\mathfrak{J})$ et $X^i \leq_p X^i 1$. Mais alors,

pour tout $\tau \in T$, $X^i 1^{+e_\tau} \in M(\mathfrak{J})$.

Comme $\mathfrak{J}$ est un V-idéal et $\text{Supp}(X^i 1)$ est un sous-ensemble fini de T , il existe $\tau_0 \in T$ (on peut d'ailleurs choisir τ_0 dans $\text{Supp}(X^i 1)$), tel que pour tout $\tau \in \text{Supp}(X^i 1)$ on ait $N_{\mathfrak{J}}(X_{\tau_0}) \subseteq N_{\mathfrak{J}}(X_\tau)$.

D'après le choix de $X^i 1$ on a $X^i 1^{+e_{\tau_0}} \in M(\mathfrak{J})$ et $X^i 1^{+e_{\tau_0}-e_{\tau_0}} = X^i 1 \notin M(\mathfrak{J})$. Montrons que pour tout $\tau \in \text{Supp}(X^i 1)$ on a $X^i 1^{+e_{\tau_0}-e_\tau} \notin M(\mathfrak{J})$. Si on avait $X^i 1^{+e_{\tau_0}-e_\tau} \in M(\mathfrak{J})$ on aurait $X^i 1^{-e_\tau} \in N_{\mathfrak{J}}(X_{\tau_0})$ et $X^i 1^{-e_\tau} \notin N_{\mathfrak{J}}(X_\tau)$, ce qui

contredit le choix de τ_0 . On a ainsi prouvé que $X^i 1^{+e_{\tau_0}}$ est un élément de $MG(\mathfrak{J})$. Par construction on a $X^i <_p X^i 1^{+e_{\tau_0}}$. D'où la proposition.

(3.3.12) Au cours de la démonstration de la proposition (3.3.11) on a en même temps démontré les résultats suivants.

Résultats : 1. Soit $\mathfrak{J}$ un idéal de $A'[X]$. Pour tout $X^i \in M(A'[X])$ on a $X^i \notin M(\mathfrak{J}) \implies$ Il existe $X^k \in ML(\mathfrak{J})$ tel que $X^i <_p X^k$.

L'implication inverse est fausse en général. En effet, on montrera plus loin qu'il existe des idéaux $\mathfrak{J}$ tels que $ML(\mathfrak{J})$ soit distinct de $MG(\mathfrak{J})$.

2. Soit $\mathfrak{J}$ un V-idéal de $A'[X]$ ($X = \{X_\tau, \tau \in T\}$). Les conditions suivantes sont équivalentes.

1° $X^i \in MG(\mathfrak{J})$

2° Si $X^i \in M(\mathfrak{J})$ et si $\tau_0 \in \text{Supp}(X^i)$ est tel que pour tout $\tau \in \text{Supp}(X^i)$ on ait $N_{\mathfrak{J}}(X_{\tau_0}) \subseteq N_{\mathfrak{J}}(X_\tau)$, on a $X^i - e_{\tau_0} \notin M(\mathfrak{J})$.

(3.3.13) Un cas très particulier.

D'après la définition de l'idéal d'annulation associé à un anneau représentable $A = A' \oplus R$ par rapport à un système de générateurs de la A' -algèbre R et puisque les idéaux $\mathfrak{J}$ que l'on considère sont justement des idéaux d'annulation associés aux anneaux représentables, on peut supposer que

dans $A'[X]$, l'idéal $\mathfrak{J}$ est différent de l'idéal premier $\mathfrak{P}_T$. D'ailleurs cet idéal premier $\mathfrak{P}_T$ correspond aux anneaux représentables triviaux, c'est-à-dire aux anneaux intègres.

Cela étant, le cas très particulier annoncé est celui des V-idéaux $\mathfrak{J}$ de $A'[X]$ qui sont tels que :

Il existe un entier n_A ($n_A \geq 2$) tel que pour tout $\tau \in T$ on ait $n_\tau = n_A$. On a Lemme. Si $\mathfrak{J}$ est un V-idéal de $A'[X]$ et s'il existe un entier n_A ($n_A \geq 2$) tel que pour tout $\tau \in T$ on ait $n_\tau = n_A$, on a

$$1^\circ \quad X^i \in M(\mathfrak{J}) \iff \sum_{\tau \in T} i_\tau \geq n_A$$

$$2^\circ \quad MG(\mathfrak{J}) = ML(\mathfrak{J}) = \{X^i \in M(A'[X]), \sum_{\tau \in T} i_\tau = n_A\}.$$

Soit $X^i \in M(\mathfrak{J})$, supposons que $\sum_{\tau \in T} i_\tau = \sum_{\tau \in \text{Supp}(X^i)} i_\tau = m < n_A$. Comme

l'ensemble fini $\{N_{\mathfrak{J}}(X_\tau), \tau \in \text{Supp}(X^i)\}$ est totalement ordonné par inclusion, on peut trouver $\tau_0 \in \text{Supp}(X^i)$ tel que $N_{\mathfrak{J}}(X_\tau) \subseteq N_{\mathfrak{J}}(X_{\tau_0})$ pour tout $\tau \in \text{Supp}(X^i)$. Mais alors, on aura $N_{\mathfrak{J}}(X^i) \subseteq N_{\mathfrak{J}}(X_{\tau_0}^m)$. D'autre part, puisque $n_{\tau_0} = n_A$ et $m < n_A$ on a $X_{\tau_0}^m \notin M(\mathfrak{J})$. Or $X_{\tau_0}^m \notin M(\mathfrak{J})$ et $N_{\mathfrak{J}}(X^i) \subseteq N_{\mathfrak{J}}(X_{\tau_0}^m)$ entraînent $X^i \notin M(\mathfrak{J})$, ce qui est absurde. On a par conséquent

$$m \geq n_A.$$

Inversement, si $m \geq n_A$, pour les mêmes raisons que plus haut, il existe $\tau_1 \in \text{Supp}(X^i)$ tel que $N_{\mathfrak{J}}(X_\tau) \supseteq N_{\mathfrak{J}}(X_{\tau_1})$ pour tout $\tau \in \text{Supp}(X^i)$. Ce qui entraîne $N_{\mathfrak{J}}(X^i) \supseteq N_{\mathfrak{J}}(X_{\tau_1}^m)$. Comme $m \geq n_A = n_{\tau_1}$, on a $X_{\tau_1}^m \in M(\mathfrak{J})$. Et comme tout à l'heure, $X_{\tau_1}^m \in M(\mathfrak{J})$ et $N_{\mathfrak{J}}(X^i) \supseteq N_{\mathfrak{J}}(X_{\tau_1}^m)$ entraînent $X^i \in M(\mathfrak{J})$. D'où le premier point du lemme.

La deuxième partie du lemme résulte de la première.

(3.3.14) Caractérisation des V-idéaux $\mathfrak{J}$ de $A'[X]$ qui sont tels que $MG(\mathfrak{J}) = ML(\mathfrak{J})$.

Proposition. Si $\mathfrak{J}$ est un V-idéal de $A'[X]$ alors les conditions suivantes sont équivalentes.

$$1^\circ \quad \text{MG}(\mathfrak{J}) = \text{ML}(\mathfrak{J}).$$

2° Il existe un entier n ($n \geq 2$) tel que l'on ait $n_\tau = n$ pour tout $\tau \in T$.

L'implication $2^\circ \implies 1^\circ$ résulte du lemme (3.3.13). Rappelons que dans ce cas, on a

$$\text{MG}(\mathfrak{J}) = \text{ML}(\mathfrak{J}) = \{X^i \in M(A'[X]), \sum_{\tau \in T} i_\tau = n\}.$$

Pour voir que l'on a $1^\circ \implies 2^\circ$, il suffit de montrer que pour tout $\tau_1, \tau_2 \in T$ on a

$$n_{\tau_1} = n_{\tau_2}.$$

S'il en était autrement, on aurait par exemple $n_{\tau_1} > n_{\tau_2}$. Ce qui entraînerait

$$X_{\tau_2}^{n_{\tau_2}} \in M(\mathfrak{J}) \text{ et } X_{\tau_1}^{n_{\tau_2}} \notin M(\mathfrak{J}).$$

Par suite, il existerait des entiers m ($0 < m \leq n_{\tau_2} - 1$) tels que

$$X_{\tau_1}^m X_{\tau_2}^{n_{\tau_2}-m} \in M(\mathfrak{J}) \text{ et } X_{\tau_1}^{m+1} X_{\tau_2}^{n_{\tau_2}-m-1} \notin M(\mathfrak{J}).$$

Pour un tel entier m , on aurait aussi $X_{\tau_1}^{m+1} X_{\tau_2}^{n_{\tau_2}-m} \in M(\mathfrak{J})$. Ce qui prouve que $X_{\tau_1}^{m+1} X_{\tau_2}^{n_{\tau_2}-m}$ est un élément de $\text{ML}(\mathfrak{J})$ qui

n'est pas dans $\text{MG}(\mathfrak{J})$. Mais cela est absurde, car, par hypothèse, $\text{ML}(\mathfrak{J}) = \text{MG}(\mathfrak{J})$.

La proposition est ainsi démontrée.

(3.3.15) Caractérisation de certains anneaux nilmoniques valuables.

Proposition. Pour tout entier n ($n \geq 2$) l'idéal $(A'[X])_n$ est un V-idéal dans $A'[X]$.

Il est évident que $\mathfrak{J}' = (A'[X])_n$ est un idéal propre de $A'[X]$. Pour voir que cet idéal est un V-idéal, il suffit de montrer que l'ensemble $\{N_{\mathfrak{J}'}(f(X)), f(X) \in A'[X]\}$ est totalement ordonné par inclusion. Mais cela résulte du fait évident suivant :

Si $d(f(X))$ désigne le minimum des degrés totaux des monômes qui sont les termes de $f(X) \in A'[X]$, alors $g(X)f(X) \in \mathfrak{J}' \iff d(f(X)) + d(g(X)) \geq n$, autrement dit,

$$N_{\mathfrak{J}'}(f(X)) = (A'[X])_{n-d(f(X))}.$$

Théorème. Soient $A = A' \oplus R$ un anneau nilmonique, s ($s \geq 1$) le rang de nilmonicité de A et $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_t, \dots, \xi_s\}$ une base de nilmonicité de A telle que $n(\xi_1) = n(\xi_2) = \dots = n(\xi_s) = n$ ($n \geq 2$).

Les conditions suivantes sont équivalentes.

1° A est valable

2° On a $A \cong A'[X]/(A'[X])_n$

Si on tient compte du fait que dans le cas où l'anneau nilmonique $A = A' \oplus R$ est valable, les entiers s et n sont des invariants de A (Définition (3.2.3) et définition (3.2.4)), le théorème résultera du lemme (3.3.13) et de la proposition (3.3.15).

(3.3.16) Quelques exemples et contre-exemples simples.

1. Reprenons l'anneau $A = k[X,Y]/(X^2,Y^2)$ de l'exemple 5 (1.3.10). Si $\mathfrak{J}$ désigne l'idéal (X^2,Y^2) de $k[X,Y]$ il est clair que

(a) $MG(\mathfrak{J}) \neq ML(\mathfrak{J})$

En effet, on a $MG(\mathfrak{J}) = \{X^2,Y^2\}$ et $ML(\mathfrak{J}) = \{X^2,XY^2,Y^2,YX^2\}$.

(b) Pour la proposition (3.3.11) on a vraiment besoin de l'hypothèse " $\mathfrak{J}$ est un V-idéal".

En effet, on a vu exemple 5 (1.3.10) que l'idéal $\mathfrak{J} = (X^2,Y^2)$ n'est pas un V-idéal de $k[X,Y]$. On montre que la proposition (3.3.11) est fausse pour cet idéal $\mathfrak{J}$ considéré.

En effet, on a $XY \notin \mathfrak{J}$ mais il n'existe pas de $X^k \in MG(\mathfrak{J})$ tel que $XY <_p X^k$.

(c) Puisque $MG(\mathfrak{J}) \neq ML(\mathfrak{J})$ l'implication inverse du résultat 1 (3.3.12) est fausse. On a $Y^2 <_p XY^2$ et $Y^2, XY^2 \in ML(\mathfrak{J})$.

2. L'exemple 2 a pour but de montrer que même pour les V-idéaux on peut avoir $MG(\mathfrak{J}) \neq ML(\mathfrak{J})$, autrement dit tous les V-idéaux dans un anneau de polynômes ne sont pas du type décrit dans le lemme (3.3.13).

On considère l'anneau de polynômes $k[X,Y,Z]$ où k est un corps et X,Y,Z sont des indéterminées. Soit $\mathfrak{J}$ l'idéal $(\{X^3,X^2Y,XZ,Y^2,YZ,Z^2\})$.

On a $MG(\mathfrak{J}) = \{X^3,X^2Y,XZ,Y^2,YZ,Z^2\}$ et $ML(\mathfrak{J}) = MG(\mathfrak{J}) \cup \{X^2Z,XY^2\}$ ce qui prouve que l'on a $MG(\mathfrak{J}) \neq ML(\mathfrak{J})$.

Montrons que l'idéal $\mathfrak{J}$ est un V-idéal de $k[X,Y,Z]$. On a $N_{\mathfrak{J}}(X) = (\{X^2,XY,Z\})$, $N_{\mathfrak{J}}(Y) = (\{X^2,Y,Z\})$, $N_{\mathfrak{J}}(X^2) = N_{\mathfrak{J}}(Z) = N_{\mathfrak{J}}(XY) = (\{X,Y,Z\})$.

Ce qui prouve que l'ensemble des $N_{\mathfrak{J}}(X^i Y^j Z^k)$ où $X^i Y^j Z^k$ est un monôme de $k[X,Y,Z]$ qui n'est pas dans $\mathfrak{J}$ est totalement ordonné par inclusion. Pour voir que $\mathfrak{J}$ est un V-idéal de $k[X,Y,Z]$, il suffit de montrer que si $f(X,Y,Z), g(X,Y,Z) \in k[X,Y,Z]$ on a $f(X,Y,Z)g(X,Y,Z) \in \mathfrak{J}$ si et seulement si

le produit d'un monôme non nul terme de $f(X,Y,Z)$ par un monôme non nul terme de $g(X,Y,Z)$ est un monôme appartenant à l'idéal $\mathfrak{J}$. Mais comme $N_{\mathfrak{J}}(X^2) = N_{\mathfrak{J}}(Z) = N_{\mathfrak{J}}(XY) = (\{X,Y,Z\})$ on peut se borner aux produits de la forme $(aX + bY)(a'X + b'Y)$ où $a,b,a',b' \in k$. Pour qu'un produit du type considéré soit dans $\mathfrak{J}$ il faut et il suffit que l'on ait $aa' = 0$ et $ab' + a'b = 0$, c'est-à-dire $a = 0$ et $a' = 0$ ou $a = 0$ et $b = 0$ ou $a' = 0$ et $b' = 0$. D'où résulte ce que l'on voulait. Ce qui prouve que l'idéal $\mathfrak{J} = (X^3, X^2Y, XZ, Y^2, YZ, Z^2)$ est un V -idéal de $k[X,Y,Z]$.

Chapitre IV

SOUS-ENSEMBLES PARTICULIERS DE N^S ($2 \leq s < +\infty$) LIES AUX V-IDEAUX

§(4.1) - SOUS-ENSEMBLES DE N^S ($2 \leq s < +\infty$) DE TYPE ML DE PREVALUATION.

(4.1.1.) Soit E un sous-ensemble de $M(A'[X])$ où A' est un anneau intègre et où $X = \{X_1, \dots, X_t, \dots, X_s\}$ est une famille de s indéterminées ($1 \leq s < +\infty$). D'après le lemme (3.3.9), si E est de la forme $ML(\mathfrak{J})$ (resp. $MG(\mathfrak{J})$) où $\mathfrak{J}$ est un idéal

$\mathbb{P}_{\{1, \dots, t, \dots, s\}}$ -primaire de $A'[X]$, on a

1° L'unité 1 de A' n'appartient pas à E

2° Pour tout t tel que $1 \leq t \leq s$, il existe un entier unique n_t

tel que

$$X_t^{n_t} \in E.$$

3° Pour tout $i \in N^S$, on a $X^i \in E \iff$ il existe $t \in \text{Supp}(X^i)$

tel que, il n'existe pas $X^k \in E$ tel que $X^k \leq_p X^{i-e_t}$ (resp. il n'existe pas de couple $(t, X^k) \in \text{Supp}(X^i) \times E$ tel que $X^k \leq_p X^{i-e_t}$).

Un sous-ensemble E de $M(A'[X])$ vérifiant les conditions 1°, 2° et 3° précédentes est dit sous-ensemble de type ML (resp. MG) dans $M(A'[X])$.

Si E est un sous-ensemble de type ML (resp. MG) dans $M(A'[X])$, les monômes $X_t^{n_t}$ ($1 \leq t \leq s$) de E sont dits monômes de base de E .

On va supposer, désormais, que l'entier s ($1 \leq s < +\infty$) ainsi que la suite $(n_t, t = 1, 2, \dots, s)$ sont donnés une fois pour toute et sont tels que

$$n_t \geq n_{t+1} \geq 2$$

pour tout entier t tel que $1 \leq t \leq s-1$.

On se propose, dans ce chapitre, de faire une étude préliminaire à la détermination de certains invariants associés aux sous-ensembles E de $M(A'[X])$ tels que

$$E = ML(\mathfrak{J}) \text{ (resp. } MG(\mathfrak{J})),$$

où $\mathfrak{J}$ est un idéal $\mathbb{P}_{\{1, 2, \dots, s\}}$ -primaire et d'obtenir, pour ces invariants, des conditions nécessaires (on montrera, plus tard, que ces conditions sont suffisantes si $\mathfrak{J}$ est engendré uniquement par des monômes unitaires) pour que $\mathfrak{J}$ soit un V-idéal de $A'[X]$.

Si $A'[X]$ est l'anneau de polynômes associé à un anneau nilmonique valable $A = A' \oplus R$ et si $\mathfrak{J}$ est l'idéal d'annulation associé (dans $A'[X]$) à l'anneau A , la remarque (3.1.5) et la proposition (3.1.7) montrent que l'idéal $\mathfrak{J}$ est du type décrit ci-dessus. Dans ce cas, l'entier s qui est le rang de

nilmonicité de A ainsi que la suite $(n_t, t=1, \dots, s) (n_t \geq n_{t+1} \geq 2, 1 \leq t \leq s-1)$ qui est la suite de nilpotence de A sont des invariants de l'anneau A considéré (définitions (3.2.3) et (3.2.4)). L'étude que l'on se propose de faire nous permettra donc d'obtenir d'autres invariants associés à un anneau nilmonique valable A de rang de nilmonicité donné s et de suite de nilpotence donnée $(n_t, t = 1, \dots, s) (n_t \geq n_{t+1} \geq 2, 1 \leq t \leq s-1)$.

Pour des raisons de commodité, l'ensemble $M(A'[X])$ muni de sa structure de semi-groupe multiplicatif ordonné par la relation $\leq_p$ ((3.3.6)) sera presque toujours identifié $(X_t (1 \leq t \leq s) \longleftrightarrow e_t = (\delta_{t,q}, q=1, \dots, s)$ où $\delta_{t,q}$ désigne le symbole de Kronecker) à l'ensemble N^S (N désigne l'ensemble des entiers naturels) muni de sa structure de semi-groupe additif ordonné par la relation $\leq_p$. Ainsi tout énoncé relatif à $M(A'[X])$ se traduit de façon naturelle dans N^S . On se servira des traductions dans N^S sans autre mention que les références des énoncés correspondants dans $M(A'[X])$. Certains énoncés nouveaux qui seront introduits directement dans N^S se traduiront naturellement dans $M(A'[X])$.

(4.1.1) Soit E ($E \neq \emptyset$) un sous-ensemble de N^S ($1 \leq s < +\infty$). On pose

$$N_{\text{ext}}^S(E) = \{i \in N^S ; \text{il existe } k \in E, k \leq_p i\}.$$

Il est clair que l'on a $E \subseteq N_{\text{ext}}^S(E)$. Le complémentaire de $N_{\text{ext}}^S(E)$ dans N^S est désigné par $N_{\text{int}}^S(E)$.

On voit que $(N_{\text{int}}^S(E), N_{\text{ext}}^S(E))$ est une partition de N^S . Cette partition est dite partition canonique de N^S par son sous-ensemble E.

On pose $\overline{N_{\text{int}}^S(E)} = N_{\text{int}}^S(E) \cup ML(N_{\text{ext}}^S(E))$, c'est-à-dire l'ensemble des $i \in N^S$ tels que $i \in N_{\text{int}}^S(E)$ ou $i \in N_{\text{ext}}^S(E)$ et il existe $t \in \text{Supp}(i)$ tel que $i - e_t \in N_{\text{int}}^S(E)$.

On dira qu'un sous-ensemble E de N^S est séparateur si l'on a

$$N_{\text{int}}^S(E) = \{i \in N^S, \text{il existe } k \in E, i <_p k\}.$$

(4.1.2) Compte tenu de (4.1), on se borne dès à présent, sauf mention expresse du contraire, aux sous-ensembles E de N^S ($1 \leq s < +\infty$ et s donné) qui sont de type ML (respectivement MG) et tels que les points de base $(n_t e_t, t = 1, \dots, s)$ $(n_t \geq n_{t+1} \geq 2, 1 \leq t \leq s-1)$ soient donnés.

Remarque. Si $\dot{0}$ désigne (comme ce sera toujours le cas) le point de N^S dont toutes les composantes sont nulles, les conditions de définition des sous-ensembles E de type ML (respectivement MG) dans N^S seront les suivantes.

$$1^\circ \dot{0} \notin E$$

2° Pour tout t ($1 \leq t \leq s$) il existe un entier (unique) n_t tel que $n_t e_t \in E$

3° i est un point de E si et seulement si, il existe $t \in \text{Supp}(i)$ tel que, il n'existe pas $k \in E$ tel que $k \leq_p i - e_t$ (resp. il n'existe pas de couple $(t, k) \in \text{Supp}(i) \times E$ tel que $k \leq_p i - e_t$).

Notons que si E est un sous-ensemble de type ML (respectivement MG) dans N^S on a

$$ML(N_{\text{ext}}^S(E)) \text{ (respectivement } MG(N_{\text{ext}}^S(E)) \text{) est égal à } E.$$

(4.1.3) Définition. Soit $(N_{\text{int}}^S(E), N_{\text{ext}}^S(E))$ la partition canonique de N^S par un de ses sous-ensembles E . On dit que la partition considérée (ou par abus de langage le sous-ensemble E) est de pré-valuation dans N^S , si la condition suivante est satisfaite :

(PV.1) Il n'existe pas de quadruple (i, j, k, l) de points de N^S tels que $k+i \in N_{\text{ext}}^S(E), k+j \in N_{\text{int}}^S(E)$ alors que $l+i \in N_{\text{int}}^S(E), l+j \in N_{\text{ext}}^S(E)$.

Remarques. 1. Si $\mathfrak{J}$ est un idéal $\mathbb{P}_{\{1, \dots, s\}}$ -primaire dans $A'[X]$ qui de plus est un V -idéal, le lemme (3.3.2) et la proposition (3.1.7) montrent que $ML(\mathfrak{J})$ (respectivement $MG(\mathfrak{J})$) qui est un sous-ensemble de type ML (respectivement MG) dans $M(A'[X])$ est aussi de pré-valuation. En effet, la traduction dans $M(A'[X])$ de la condition (PV.1) n'est autre chose que la restriction de la proposition (3.1.7) aux quadruples (X^i, X^j, X^k, X^l) de monômes unitaires dans $A'[X]$.

Cela prouve que si E est un sous-ensemble de type ML (respectivement MG) dans N^S (ou, après l'identification naturelle, dans $M(A'[X])$) et si l'on suppose que E est aussi de pré-valuation, la famille $\{\mathfrak{T}_E(i), i \in N^S\}$ (où $\mathfrak{T}_E(i)$ désigne, comme ce sera toujours le cas, l'ensemble $\{j \in N^S, j+i \in N_{\text{ext}}^S(E)\}$) est totalement ordonnée par inclusion. En particulier la famille $\{\mathfrak{T}_E(e_t), t=1, \dots, s\}$ est totalement ordonnée par inclusion.

2. Si E est un sous-ensemble de N^S tel que E soit de type MG et de pré-valuation, la proposition (3.3.11) prouve que E est un sous-ensemble séparateur dans N^S .

3. Un sous-ensemble (de N^S) E de type ML n'étant pas en général de type MG (exemple 1 (3.3.15)), il ne sera pas en général séparateur, même quand il est aussi de pré-évaluation (exemple 2 (3.3.16) et remarque 1 précédente).

Par contre le résultat 1 (3.3.12) montre que si E est de type ML et si $i \in N_{\text{int}}^S(E)$, il existe $k \in E$ tel que $i <_p k$.

(4.1.4) Soient $i = (i_1, \dots, i_t, \dots, i_s)$, $j = (j_1, \dots, j_t, \dots, j_s)$ des points de N^S .

On appelle différence de i et de j le s -uplet $i-j = (i_t - j_t, t=1, \dots, s)$.

(4.1.5) Définition. Soit $(N_{\text{int}}^S(E), N_{\text{ext}}^S(E))$ la partition canonique de N^S par son sous-ensemble E . On dit que le quadruple (i, j, k, l) de points de N^S est irrégulier pour la partition considérée, si les différences $i-j$ et $k-l$ sont égales avec $i \in N_{\text{ext}}^S(E)$ et $j \in N_{\text{int}}^S(E)$, alors que $k \in N_{\text{int}}^S(E)$ et $l \in N_{\text{ext}}^S(E)$.

Proposition. Soit $(N_{\text{int}}^S(E), N_{\text{ext}}^S(E))$ la partition canonique de N^S par son sous-ensemble E . Les conditions suivantes sont équivalentes.

(PV.1) Il n'existe pas de quadruple (i, j, k, l) de points de N^S tels que l'on ait $k+i \in N_{\text{ext}}^S(E)$ et $k+j \in N_{\text{int}}^S(E)$, alors que $l+i \in N_{\text{int}}^S(E)$ et $l+j \in N_{\text{ext}}^S(E)$.

(PV.2) Il n'existe pas de quadruple (i, j, k, l) de points de N^S irrégulier pour la partition considérée, c'est-à-dire que l'on ait par exemple $i-j = k-l$, avec $i \in N_{\text{ext}}^S(E)$ et $j \in N_{\text{int}}^S(E)$ alors que $k \in N_{\text{int}}^S(E)$ et $l \in N_{\text{ext}}^S(E)$.

Si (i, j, k, l) est un quadruple de points de N^S tels que les relations d'appartenance écrites dans la condition (PV.1) ci-dessus soient vraies, il est clair que les points $v = k+i$, $v' = k+j$, $w = l+i$, $w' = l+j$ forment un quadruple irrégulier pour la partition considérée.

Supposons qu'il existe un quadruple (i, j, k, l) (de points de N^S) irrégulier pour la partition considérée et vérifiant les relations écrites dans la condition (PV.2) ci-dessus. On considère les points $u = \min(i, j)$, $u' = \min(k, l)$, $v = \max(\vec{0}, i-j) = \max(\vec{0}, k-l)$, $v' = \max(\vec{0}, j-i) = \max(\vec{0}, l-k)$ [où $i = (i_1, \dots, i_t, \dots, i_s)$, $j = (j_1, \dots, j_t, \dots, j_s)$ étant deux points de Z^S , $\min(i, j)$ (respectivement $\max(i, j)$) désigne le point de Z^S dont la composante de rang t ($1 \leq t \leq s$) est égale à $\min(i_t, j_t)$ (respectivement $\max(i_t, j_t)$)].

Il est clair que les points u , u' , v , v' sont dans N^S et comme $i-j = k-l$, il est facile de voir que l'on a $v+u = i$, $v+u' = k$, $v'+u = j$, $v'+u' = l$.

Ce qui prouve que l'on n'a pas (PV.1), car le quadruple (i, j, k, l) est supposé irrégulier pour la partition considérée.

(4.1.6) Soit t ($1 \leq t \leq s$). On peut considérer deux applications canoniques de N^t dans N^s : la première $\varphi_{t,s}$ qui applique le point $(x_1, \dots, x_t)$ sur le point $(x_1, \dots, x_t, 0, \dots, 0)$ de N^s la seconde $\psi_{t,s}$ qui applique le même point $(x_1, \dots, x_t)$ sur le point $(0, \dots, 0, x_1, \dots, x_t)$ de N^s . L'image de N^t par $\varphi_{t,s}$ sera encore notée (par abus de notation) N^t . Si l'entier s ($1 \leq s < +\infty$) est fixé, comme ce sera le cas dans la suite et si pour tout t ($1 \leq t \leq s$) tN désigne le sous-ensemble de N^s formé des points dont les t premières composantes sont nulles, l'image de N^t par $\psi_{t,s}$ n'est autre chose que ${}^{s-t}N$. Ces notations seront conservées dans toute la suite.

(4.1.7) Lemme. Soit $(N_{\text{int}}^s(E), N_{\text{ext}}^s(E))$ la partition canonique de N^s par son sous-ensemble E . Si (i, j, k, l) est un quadruple de points de N^s irrégulier pour la partition considérée tel que $i-j = k-l$, il existe un autre quadruple (i', j', k', l') de points de N^s irrégulier pour la même partition tel que $i'-j' = k'-l' = i-j$, les points i', j', k', l' étant dans $N_{\text{int}}^s(E)$.

Supposons que pour le quadruple irrégulier (i, j, k, l) tel que $i-j = k-l$ on a, par exemple, $i \in N_{\text{ext}}^s(E)$ et $j \in N_{\text{int}}^s(E)$ alors que $k \in N_{\text{int}}^s(E)$ et $l \in N_{\text{ext}}^s(E)$. On pose

$$t = \min(i, k) \text{ et } u = \min(j, l).$$

Par hypothèse, $i-j = k-l \iff i-k = j-l$, ce qui prouve que $t-u = i-j = k-l$.

Par définition des points t et u , on a $t, u \in N^s$, car les points i, j, k, l sont dans N^s , mais on a aussi $t \leq_p k$ et $u \leq_p j$; il en résulte $t, u \in N_{\text{int}}^s(E)$, car, on a, par hypothèse, $j, k \in N_{\text{int}}^s(E)$. En outre, on a $t <_p i$, car, par définition, $t \leq_p i$; mais, par hypothèse, $i \in N_{\text{ext}}^s(E)$ et on vient de montrer que $t \in N_{\text{int}}^s(E)$. On peut donc relier i à t par une suite de points $i = l_0, l_1, \dots, l_c, \dots, l_m = t$ de telle sorte que $l_{c-1} - l_c$ soit égal à l'un des points $e_1, e_2, \dots, e_s$, on pose $l_{c-1} - l_c = e_{q(c)}$. Si $l_c \in N_{\text{ext}}^s(E)$, pour tout c' tel que $c' < c$, on a $l_{c'} \in N_{\text{ext}}^s(E)$, car, par construction, on a $l_{c+1} <_p l_c$, autrement dit, la suite des l_c est strictement décroissante pour l'ordre $\leq_p$.

Mais il ne peut pas exister de suite infinie strictement décroissante, pour l'ordre $\leq_p$, de points de $N_{\text{ext}}^s(E)$, car, on a supposé que E était de type ML (resp. MG), donc $0 \notin E$. Ce qui prouve qu'il existe un indice c_0 tel que

$l_{c_0} \in N_{\text{ext}}^s(E)$ et $l_{c_0+1} \in N_{\text{int}}^s(E)$. Comme $l_{c_0+1} = l_{c_0} - e_{q(c_0+1)}$, on a par

conséquent prouvé que $l_{c_0} \in \overline{N_{\text{int}}^s(E) \cap N_{\text{ext}}^s(E)}$.

On pose $i' = l_{c_0}$ et $j' = j - (i - i') = u + i' - t$ (car $t - u = i - j = k - l$).

Cela étant, il est clair que l'on a : 1° $i' - j' = t - u$, 2° $j' \in N^s$, car, les points u et $i' - t$ sont dans N^s , et 3° $j' \in N_{\text{int}}^s(E)$, car, on a $j \in N_{\text{int}}^s(E)$ et $(i - i') \in N^s$.

Par un raisonnement analogue au précédent appliqué aux couples (u, l) , (t, u) , on montre l'existence d'un couple k', l' tel que $k' - l' = k - l$, $k' \in N_{\text{int}}^s(E)$ et $l' \in \overline{N_{\text{int}}^s(E) \cap N_{\text{ext}}^s(E)}$. Le quadruple (i', j', k', l') sera un quadruple satisfaisant aux conditions du lemme.

Remarque. Supposons que le quadruple (i', j', k', l') obtenu précédemment soit formé uniquement de points de N^t ($1 \leq t \leq s$). Soient $\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}', \bar{l}'$ les projections respectives des points i', j', k', l' sur N^{t-1} . Comme j' et k' sont dans $N_{\text{int}}^s(E)$, les points $\bar{i}', \bar{j}'$ seront aussi dans $N_{\text{int}}^s(E)$. Par suite, compte tenu du lemme précédent, s'il existe des quadruples irréguliers dans N^t , il existera de tels quadruples dans $\overline{N^t \cap N_{\text{int}}^s(E)}$ tels que les projections sur N^{t-1} d'au plus deux de ses points soient dans $N_{\text{ext}}^s(E)$. S'il en existe deux effectivement, ils sont nécessairement les projections des premier et quatrième points ou des deuxième et troisième points du quadruple irrégulier considéré. Mais alors, dans ce dernier cas, $(\bar{i}', \bar{j}', \bar{k}', \bar{l}')$ sera un quadruple irrégulier de points de N^{t-1} . Donc si t est le plus petit entier tel qu'il existe des quadruples irréguliers dans N^t , il en existera un dans $\overline{N^t \cap N_{\text{int}}^s(E)}$ tel que la projection sur N^{t-1} d'au plus un de ses points soit dans $N_{\text{ext}}^s(E)$.

De la même façon que précédemment, si l'on considère le plus grand entier t tel qu'il existe des quadruples irréguliers dans N^t , on montre qu'il en existe un dans $\overline{N^t \cap N_{\text{int}}^s(E)}$ tel que la projection sur N^{t+1} d'au plus un

de ses points soit dans $N_{\text{ext}}^S(E)$.

(4.1.8) Soit $(N_{\text{int}}^S(E), N_{\text{ext}}^S(E))$ la partition canonique de N^S par son sous-ensemble E . Si $i = (i_1, \dots, i_{t-1}, 0, \dots, 0)$ ($2 \leq t \leq s$) est un point de $N^{t-1} \cap N_{\text{int}}^S(E)$, on note $J_t(i)$ le plus petit entier (nécessairement positif) tel que $i + J_t(i)e_t \in N_{\text{ext}}^S(E)$. De même si $j = (0, \dots, 0, j_{t+1}, \dots, j_s)$ ($1 \leq t \leq s-1$) est un point de $N^t \cap N_{\text{int}}^S(E)$, on note $I_t(j)$ le plus petit entier (nécessairement positif) tel que $j + I_t(j)e_t \in N_{\text{ext}}^S(E)$.

Remarque. Les fonctions J_t et I_t ainsi définies dépendent bien entendu du sous-ensemble E considéré dans N^S . Ces fonctions auraient donc dû être notées par exemple $J_{E,t}$ et $I_{E,t}$. C'est d'une part, pour simplifier l'écriture, d'autre part, à cause de l'usage fait plus tard de ces fonctions que nous avons adopté les notations J_t et I_t . L'omission du symbole E ne présente d'ailleurs aucun inconvénient, car un seul sous-ensemble E est considéré à la fois.

Proposition. Soit $(N_{\text{int}}^S(E), N_{\text{ext}}^S(E))$ la partition canonique de N^S par son sous-ensemble E . L'une ou l'autre des conditions équivalentes (PV.1) (PV.2) est équivalente à l'une ou l'autre des conditions suivantes.
(PV.3) Pour tout t ($2 \leq t \leq s$), pour tout quadruple (i, j, k, l) de points de $N^{t-1} \cap N_{\text{int}}^S(E)$ dont au plus un est dans $N_{\text{ext}}^S(E)$ et tels que $i - j = k - l$, les propriétés suivantes sont satisfaites.

(a) Si aucun des points du quadruple considéré n'est dans $N_{\text{ext}}^S(E)$ on a

$$|J_t(i) - J_t(j)| = |J_t(k) - J_t(l)| \leq 1$$

(b) Si i ou j est l'unique point du quadruple considéré appartenant à $N_{\text{ext}}^S(E)$ on a

$$|J_t(i) - J_t(j)| \leq |J_t(k) - J_t(l)| + 1$$

(PV.4) Pour tout t ($1 \leq t \leq s-1$), pour tout quadruple (i, j, k, l) de points de $N^t \cap N_{\text{int}}^S(E)$ avec les mêmes hypothèses que dans (PV.3), on a les propriétés (a) et (b) de (PV.3) où J_t est remplacé par I_t .

Supposons que la condition (PV.2) ne soit pas satisfaite, c'est-à-dire qu'il existe des quadruples irréguliers pour la partition considérée.

D'après le lemme et la remarque (4.1.7), on peut se borner à un quadruple irrégulier (i, j, v, w) de points de ${}^{t-1}N$ ($2 \leq t \leq s$) tels que $i \in N_{\text{ext}}^S(E) \cap \overline{N_{\text{int}}^S(E)}$, $j \in N_{\text{int}}^S(E)$, $v \in N_{\text{int}}^S(E)$, $w \in N_{\text{ext}}^S(E) \cap \overline{N_{\text{int}}^S(E)}$ et tels que, si $\bar{i}, \bar{j}, \bar{v}, \bar{w}$ désignent les projections sur tN des points i, j, v, w , au plus un des points $\bar{i}, \bar{w}$ soit dans $N_{\text{ext}}^S(E)$, les points $\bar{j}, \bar{v}$ étant automatiquement dans $N_{\text{int}}^S(E)$. Soient i_t, j_t, v_t, w_t les t -ièmes composantes des points i, j, v, w . On a, par définition, d'une part, $j_t - i_t = w_t - v_t$, d'autre part, $i_t \geq I_t(\bar{i})$, $j_t < I_t(\bar{j})$, $v_t < I_t(\bar{v})$ et $w_t \geq I_t(\bar{w})$, ce qui implique $I_t(\bar{j}) - I_t(\bar{i}) \geq j_t - i_t + 1$ et $I_t(\bar{w}) - I_t(\bar{v}) \leq w_t - v_t - 1 = j_t - i_t - 1$. Donc $(I_t(\bar{j}) - I_t(\bar{i})) - (I_t(\bar{w}) - I_t(\bar{v})) \geq 2$.

Ce qui, compte tenu du choix du quadruple (i, j, v, w) , prouve que l'on a pas (PV.4), il en résulte (PV.4) $\implies$ (PV.2). Une démonstration analogue à la précédente (remarque (4.1.7)) permet, en remplaçant I_t par J_t , de voir que l'on a aussi (PV.3) $\implies$ (PV.2). Supposons que l'on n'ait pas (PV.3). Donc il existe t ($2 \leq t \leq s$) et un quadruple (i, j, k, l) de points de $N^{t-1} \cap \overline{N_{\text{int}}^S(E)}$ tel que $J_t(i) - J_t(j) \geq J_t(k) - J_t(l) + 2 \geq 2$ avec $k, l, i \in N_{\text{int}}^S(E)$ et $i - j = k - l$.

On pose

$$i^* = i + [J_t(k) - J_t(l) + J_t(j) + 1]e_t, \quad j^* = j + J_t(j)e_t, \quad k^* = k + J_t(k)e_t, \quad l^* = l + [J_t(l) - 1]e_t.$$

Comme par hypothèse $J_t(k) - J_t(l) \geq 0$ et $l \in N_{\text{int}}^S(E)$, les points i^*, j^*, k^*, l^* sont dans N^S . On vérifie que l'on a $i^* - j^* = k^* - l^*$, car $i - j = k - l$ (par hypothèse). La définition de la fonction $J_t: N^{t-1} \cap \overline{N_{\text{int}}^S(E)} \longrightarrow N$ et l'inégalité

$$J_t(k) - J_t(l) + J_t(j) + 1 \leq J_t(i) - 1 \text{ (hypothèse) montrent que l'on a aussi } i^* \in N_{\text{int}}^S(E)$$

et $j^* \in N_{\text{ext}}^S(E)$ alors que $k^* \in N_{\text{ext}}^S(E)$ et $l^* \in N_{\text{int}}^S(E)$. Ce qui prouve que le

quadruple (i^*, j^*, k^*, l^*) est un quadruple irrégulier pour la partition considérée.

Autrement dit on n'a pas (PV.2) d'où résulte (PV.2) $\implies$ (PV.3). Une démonstration analogue à la précédente, en remplaçant J_t par I_t , permet de voir que l'on a aussi (PV.2) $\implies$ (PV.4). La proposition est ainsi démontrée.

(4.1.9) Si E est un sous-ensemble de type ML (respectivement MG) dans N^S qui de plus est de pré-évaluation, on supposera toujours, compte tenu de la remarque 1 (4.1.3) que la condition suivante est satisfaite.

(1) Pour tout $i \in N^S$ on a $i+e_t \in N_{\text{ext}}^S(E) \implies i+e_{t+1} \in N_{\text{ext}}^S(E)$

($1 \leq t \leq s-1$).

La condition (1) est équivalente à la condition suivante.

(2) Pour tout $i \in N^S$ et pour tout entier positif r on a

$$i+re_t \in N_{\text{ext}}^S(E) \implies i+re_{t+1} \in N_{\text{ext}}^S(E) \quad (1 \leq t \leq s-1)$$

Si on pose $r=1$, on voit que (2) implique (1). Pour montrer que la condition (1) implique la condition (2), on suppose que la condition (1) est satisfaite et on montre que si la condition (2) est vraie pour $r-1$ ($r \geq 2$) elle sera encore vraie pour r .

En effet, $i+re_t \in N_{\text{ext}}^S(E) \iff i+(r-1)e_t+e_t \in N_{\text{ext}}^S(E)$, la condition (1) prouve

alors que l'on a $i+(r-1)e_t+e_{t+1} \in N_{\text{ext}}^S(E) \iff i+e_{t+1}+(r-1)e_t \in N_{\text{ext}}^S(E)$,

l'hypothèse de récurrence prouve que l'on a

$$i+e_{t+1}+(r-1)e_{t+1} \in N_{\text{ext}}^S(E) \iff i+re_{t+1} \in N_{\text{ext}}^S(E)$$

d'où résulte ce que l'on voulait.

(4.1.10) Si E est un sous-ensemble de N^S tel que la condition (2) (4.1.9) soit satisfaite et si n_t, n_{t+1} ($1 \leq t \leq s-1$) sont les plus petits entiers tels que $n_t e_t$ et $n_{t+1} e_{t+1}$ soient dans $N_{\text{ext}}^S(E)$, c'est-à-dire les entiers tels que $n_t e_t$ et $n_{t+1} e_{t+1}$ soient dans E (remarque (4.1.2)), on a nécessairement $n_t \geq n_{t+1}$.

Si on avait $n_t < n_{t+1}$, on aurait $(n_t-1)e_t+e_t \in N_{\text{ext}}^S(E)$ donc en appliquant deux fois la condition (2) (4.1.9) on aurait $n_t e_{t+1} \in N_{\text{ext}}^S(E)$, ce qui est absurde car on a supposé $n_t < n_{t+1}$.

Cela prouve, compte tenu de la remarque 1 (4.1.3), qu'il n'y a pas perte de généralité (pour le problème que l'on se propose de résoudre (4.1)) à supposer que la condition (2) (4.1.9) est satisfaite pour les sous-ensembles E de N^S que l'on considère. Il reste entendu que ces sous-ensembles E sont de type ML ou MG.

(4.1.11) Lemme. Soit dans N^S un sous-ensemble E de type ML (respectivement MG) de points de base $(n_t e_t, t=1, \dots, s)$ où les entiers n_t sont tels que $n_t \geq n_{t+1} \geq 2$ ($1 \leq t \leq s-1$). Les conditions suivantes sont satisfaites.

1° Pour tout t ($1 \leq t \leq s-1$) la fonction I_t est strictement décroissante pour l'ordre $\leq_p$ restreint à $\overline{t_N \cap N_{int}^s(E)}$ (domaine de définition de I_t) et telle que $I_t(\dot{0}) = n_t, I_t(j) = 0$ pour tout $j \in \overline{t_N \cap N_{int}^s(E)} \cap N_{ext}^s(E)$.

2° $E = ML(N_{ext}^s(E)) = \{n_s e_s\} \cup \{j + r e_t, j \in \overline{t_N \cap N_{int}^s(E)} (1 \leq t \leq s-1), r = I_t(j)$ ou $r > I_t(j)$ et il existe $t' \in \text{Supp}(j)$ tel que $r < I_t(j - e_{t'})\}$, si E est de type ML.

3° $E = MG(N_{ext}^s(E)) = \{n_s e_s\} \cup \{j + I_t(j) e_t (1 \leq t \leq s-1), j \in \overline{t_N \cap N_{int}^s(E)}\}$, si E est de type MG.

Si t' est un entier tel que $t+1 \leq t' \leq s$ et si $j = (0, \dots, 0, j_{t+1}, \dots, j_s)$ est un point de $\overline{t_N \cap N_{int}^s(E)}$, on a $I_t(j) > I_t(j + e_{t'})$. En effet, on a par définition $j + [I_t(j) - 1] e_{t'} + e_t \in N_{ext}^s(E)$. D'après la condition (2) (4.1.9) on aura $j + [I_t(j) - 1] e_{t'} + e_t \in N_{ext}^s(E)$ donc $j + e_t + [I_t(j) - 1] e_{t'} \in N_{ext}^s(E)$, ce qui prouve que l'on a $I_t(j + e_{t'}) < I_t(j)$. Les égalités $I_t(\dot{0}) = n_t$ et $I_t(j) = 0$ pour tout $j \in \overline{t_N \cap N_{int}^s(E)} \cap N_{ext}^s(E)$ sont évidentes. La condition 1° est ainsi vérifiée.

Le sous-ensemble décrit dans la condition 2° est visiblement contenu dans $ML(N_{ext}^s(E))$. Pour voir que l'inverse a aussi lieu, il suffit de voir que tout point j tel que $j \in ML(N_{ext}^s(E))$ et $j \notin \overline{s-1_N}$ se met sous la forme $j = j_1 + r e_t$ ($1 \leq t \leq s-1$) avec $j_1 \in \overline{t_N \cap N_{int}^s(E)}$ et $r = I_t(j)$ ou $r > I_t(j)$ et il existe $t' \in \text{Supp}(j)$ tel que $I_t(j - e_{t'}) > r$.

Compte tenu de la condition (2) (4.1.9), le 3° du lemme n'est autre chose que le résultat 2 (3.3.12).

(4.1.12) Lemme. On conserve les hypothèses du lemme (4.1.11). Les conditions suivantes sont satisfaites.

1° Pour tout t ($2 \leq t \leq s$) la fonction J_t est non-croissante pour l'ordre $\leq_p$ restreint à $\overline{N^{t-1} \cap N_{int}^s(E)}$ (domaine de définition de J_t) telle que $J_t(\dot{0}) = n_t$ et que, pour tout $i \in \overline{N^{t-1} \cap N_{int}^s(E)} \cap N_{ext}^s(E)$ et pour tout $t' \in \text{Supp}(i)$, on ait $J_t(i) = 0, J_t(i - e_{t'}) = 1$.

2° $E = ML(N_{ext}^s(E)) = \{n_1 e_1\} \cup \{i + J_t(i) e_t (2 \leq t \leq s), i \in \overline{N^{t-1} \cap N_{int}^s(E)}\}$, si E est de type ML.

3° $E = MG(N_{\text{ext}}^S(E)) = \{n_1 e_1\} \cup \{i + J_t(i) e_t \mid (2 \leq t \leq s), i \in N^{t-1} \cap \overline{N_{\text{int}}^S(E)}\}$,

quel que soit $t' \in \text{Supp}(i)$ on a $J_t(i - e_{t'}) > J_t(i)$, si E est de type MG.

4° Pour tout $i \in N^{t-1} \cap \overline{N_{\text{int}}^S(E)}$ ($2 \leq t \leq s$), pour tout t' ($1 \leq t' \leq t-1$) on a

$$J_t(i) - J_t(i + e_{t'}) \leq 1.$$

La condition 1° est satisfaite de façon évidente.

Pour voir que la condition 2° est satisfaite, il suffit de remarquer que tout point i tel que $i \in ML(N_{\text{ext}}^S(E))$ et $i \notin N^1$ se met sous la forme $i = i_1 + J_t(i_1)$ où $i_1 \in N^{t-1} \cap \overline{N_{\text{int}}^S(E)}$ ($2 \leq t \leq s$). Cela résulte de la condition (2) (4.1.9).

Comme pour le lemme (4.1.11) la condition 3° est une traduction du résultat 2 (3.3.12).

Montrons que nous avons la condition 4°. Soit $i \in N^{t-1} \cap \overline{N_{\text{int}}^S(E)}$. Si t' est un entier tel que $1 \leq t' \leq t-1$, il s'agit de prouver que l'on a $J_t(i) - J_t(i + e_{t'}) \leq 1$. Si on avait $J_t(i) \geq J_t(i + e_{t'}) + 2$, on aurait $i + (J_t(i) - 1) e_{t'} \in N_{\text{int}}^S(E)$ et $i + (J_t(i) - 2) e_{t'} + e_{t'} \in N_{\text{ext}}^S(E)$, ce qui, compte tenu du choix de t' et de la condition (2) (4.1.9), est absurde. Le lemme est ainsi démontré.

Remarque. Le lemme précédent permet d'énoncer la condition (PV.3) sous la forme plus simple suivante, (c'est sous cette forme simple que la condition (PV.3) sera considérée par la suite)

pour tout t ($2 \leq t \leq s$), pour tout quadruple (i, j, k, l) de points de $N^{t-1} \cap \overline{N_{\text{int}}^S(E)}$ dont au plus un est dans $N_{\text{ext}}^S(E)$ et qui sont tels que $i - j = k - l$, on a

$$\left| |J_t(i) - J_t(j)| - |J_t(k) - J_t(l)| \right| \leq 1.$$

En effet, dans la démonstration de la proposition (4.1.8), aussi bien dans le cas (a) que dans le cas (b) de la condition (PV.3), on obtient l'inégalité $J_t(i) - J_t(j) \geq J_t(k) - J_t(l) + 2$ avec $J_t(l) > 0$. Par contre, si on n'avait pas pris des précautions en distinguant les cas, dans le cas (b) on pouvait avoir $J_t(l) = 0$, de sorte que la suite de la démonstration ne serait pas possible. On montre en fait que l'on peut toujours se ramener au cas où $J_t(l)$ n'est pas nul.

Il suffit, pour cela, de remplacer dans le cas (b), le quadruple (i, j, k, l) par le quadruple $(i + e_t, j, k, l - e_t)$ ($t \in \text{Supp}(l)$) qui, compte tenu du lemme précédent, est un quadruple vérifiant les conditions de la proposition (4.1.8) avec $J_t(l) = 1$. D'où résulte la remarque.

(4.1.13) Soit E un sous-ensemble non-vidé de N^S , et soit $T = (t_1, t_2, \dots, t_s)$ un point quelconque de Z^S . On appelle translatée de E par T (et on note $T.E$) l'ensemble des points $T + k$, où k est un point quelconque de E .

(4.1.14) Soit E un sous-ensemble de type ML (resp. MG) dans N^S et soient T_1 et T_2 deux translations de Z^S . On dira, quelles que soient T_1 et T_2 , que les translatées $T_1.E$ et $T_2.E$ ne se traversent pas, si l'on a

$$T_1.(ext.E) \cap T_2.(int.E) \neq \emptyset \implies T_1.(int.E) \cap T_2.(ext.E) = \emptyset$$

où $int.E = N_{int}^S(E)$ et $ext.E = N_{ext}^S(E)$; de façon générale, quand l'ensemble par rapport auquel on définit la notion d'extérieure et d'intérieure (d'un sous-ensemble E) est fixé, par exemple N^S ou Z^S (s fixé), on adoptera les notations $int.E$ (resp. $ext.E$) au lieu de $N_{int}^S(E)$ ou $Z_{int}^S(E)$ (resp. $N_{ext}^S(E)$ ou $Z_{ext}^S(E)$).

(4.1.15) Proposition. Soit $(int.E, ext.E)$ la partition canonique de N^S (s fixé) par son sous-ensemble E . Si le sous-ensemble E est de type ML (resp. MG) dans N^S , alors l'une quelconque des conditions équivalentes (PV.1), ..., (PV.4) est équivalente à la condition suivante.

(PV.5) Deux translatées quelconques du sous-ensemble E ne se traversent pas.

Pour la démonstration de cette proposition, on pourra se borner au cas où l'une des translations est égale à $\bar{0}$ et l'ensemble E est de type ML.

Supposons que les conditions équivalentes (PV.1), ..., (PV.4) soient satisfaites pour le sous-ensemble E et qu'il existe une translation T dans Z^S telle que E et $T.E$ se traversent, c'est-à-dire qu'il existe $i, j \in E$ tels que $T + i \in int.E$ et $T + j \in ext.E$ mais $T + j \notin E$. Comme $j \in E$ et E est supposé de type ML, il existe un entier $r \in \text{Supp}(j)$ tel que $j - e_r \in int.E$. Mais on doit avoir $T + j - e_r \in ext.E$, car, si on avait $T + j - e_r \in int.E$, on aurait, par définition, $T + j \in ML(ext.E) = E$ et, par hypothèse, $T + j \notin E$, ce qui est absurde. On a donc $T + j - e_r \in ext.E$. Par suite, le quadruple $(i, j - e_r, T + i, T + j - e_r)$ est irrégulier pour le sous-ensemble E (ou pour la partition canonique de N^S

par E), ce qui est absurde, car, on a supposé que la condition (PV.2) est satisfaite pour E.

Supposons, maintenant que, quelle que soit la translation T de Z^S , les sous-ensembles E et T.E ne se traversent pas mais il existe un quadruple (u, v, u', v') de points de $N^{t-1} \cap \overline{\text{int}.E}$ ($2 \leq t \leq s$) tels que $u-v = u'-v'$ et $J_t(u) - J_t(v) \geq J_t(u') - J_t(v') + 2$ et $u', v', u \in \text{int}.E$. On considère la translation $T = u-v + (J_t(u) - J_t(v) - 1)e_t$. On a

$$T + (v + J_t(v)e_t) = u + (J_t(u) - 1)e_t \quad \text{et} \quad T + (v' + J_t(v')e_t) = u' + he_t$$

où h est un entier tel que $h \geq J_t(u') + 1$. Ce qui prouve que E et T.E se traversent, car, les points $v + J_t(v)e_t$ et $v' + J_t(v')e_t$ sont dans E alors que le point $u + (J_t(u) - 1)e_t$ est dans $\text{int}.E$ et enfin, compte tenu de l'inégalité $h \geq J_t(u') + 1$, le point $u' + he_t$ est dans $\text{ext}.E$ mais n'est pas dans E (lemme (4.1.11)). La proposition est ainsi démontrée.

§ (4.2) Familles caractéristiques, co-familles caractéristiques et bi-familles caractéristiques dans N^S ($2 \leq s \leq +\infty$).

(4.2.1) Définition. On appelle famille (resp. co-famille) dans N^S une suite

$J^{(s)} = \{J_t^{(s)}, 2 \leq t \leq s\}$ (resp. $I^{(s)} = \{I_t^{(s)}, 1 \leq t \leq s-1\}$) de fonctions telles que $J_t^{(s)}$ (resp. $I_t^{(s)}$) soit définie sur $D(J_t^{(s)})$ (resp. $D(I_t^{(s)})$) à valeurs sur (resp. dans) $[0, n_t]$ (resp. $[0, n_t^*]$) où $D(J_2^{(s)}) = \{i \in N^1, 0 \leq i_1 \leq n_1\}$ (resp. $D(I_{s-1}^{(s)}) = \{i \in {}^{s-1}N, 0 \leq i_s \leq n_s^*\}$), pour tout $t \geq 3$ (resp. $t \leq s-2$)

$D(J_t^{(s)}) = \{i \in N^{t-1}, i = i' + ke_{t-1}, i' \in D(J_{t-1}^{(s)}), 0 \leq k \leq J_{t-1}^{(s)}(i')\}$

(resp. $D(I_t^{(s)}) = \{i \in {}^tN, i = i' + ke_{t+1}, i' \in D(I_{t+1}^{(s)}), 0 \leq k \leq I_{t+1}^{(s)}(i')\}$),

enfin les entiers n_t (resp. n_t^*) ($1 \leq t \leq s$) sont tels que

$n_1 \geq \dots \geq n_t \geq n_{t+1} \geq \dots \geq n_s$ (resp. $n_1^* \geq \dots \geq n_t^* \geq n_{t+1}^* \geq \dots \geq n_s^*$).

Les entiers n_t (resp. n_t^*) ($1 \leq t \leq s$) sont dits valeurs de base de la famille (resp. co-famille) $J^{(s)}$ (resp. $I^{(s)}$).

Si aucune confusion n'est à craindre, en particulier si l'entier s est fixé et si l'on ne considère qu'une seule famille (resp. co-famille) dans N^S , on écrira J (resp. I), J_t (resp. I_t), D_t (resp. D_t^*) au lieu de J^S (resp. $I^{(s)}$), $J_t^{(s)}$ (resp. $I_t^{(s)}$), $D(J_t^{(s)})$ (resp. $D(I_t^{(s)})$).

(4.2.2) Définition. Soit $J = \{J_t, 2 \leq t \leq s\}$ (resp. $I = \{I_t, 1 \leq t \leq s-1\}$) une famille (resp. co-famille) dans N^S , de valeurs de base $\{n_t$ (resp. n_t^*), $1 \leq t \leq s\}$.

On dit que J (resp. I) est caractéristique, si pour tout t tel que $2 \leq t \leq s$ (resp. $1 \leq t \leq s-1$) les conditions suivantes sont satisfaites.

(FC.1) (resp. (CFC.1)). Pour tout t' tel que $1 \leq t' \leq t-1$ (resp. $t+1 \leq t' \leq s$), pour tout $i \in D_t$ (resp. $i \in D_t^*$) tel que $i + e_t \in D_t$ (resp. D_t^*), on a

$$0 \leq J_t(i) - J_t(i+e_t) \leq 1 \text{ (resp. } 1 < I_t(i) - I_t(i+e_t) \text{)}.$$

(FC.2) (resp. (CFC.2)). Si i_1, i_2, i_3, i_4 sont des points de D_t (resp. D_t^*) tels que $i_1 - i_2 = i_3 - i_4$ et J_t (resp. I_t) soit nulle pour au plus un de ces points, alors

$$|J_t(i_1) - J_t(i_2)| - |J_t(i_3) - J_t(i_4)| \leq 1$$

(resp. (a) $|I_t(i_1) - I_t(i_2)| - |I_t(i_3) - I_t(i_4)| \leq 1$, si I_t n'est nulle pour aucun des points considérés.

(b) $|I_t(i_1) - I_t(i_2)| \leq |I_t(i_3) - I_t(i_4)| + 1$, si i_1 ou i_2 est le seul des points considérés pour lequel I_t s'annule.

(FC.3) (resp. (CFC.3)). $J_t(\emptyset) = n_t$ (resp. $I_t(\emptyset) = n_t^*$) alors que $J_2(n_1 e_1) = 0$ (resp. $I_{s-1}(n_s^* e_s) = 0$) et $J_2((n_1 - 1)e_1) = 1$. En outre, si $t \geq 3$ (resp. $t \leq s-2$) alors pour tout $i \in D_t$ (resp. $i' \in D_t^*$) tel que $i = i' + J_{t-1}(i')e_{t-1}$ (resp. $i = i' + I_{t+1}(i')e_{t+1}$) où $i' \in D_{t-1}$ (resp. $i' \in D_{t+1}^*$) on a $J_t(i) = 0$ (resp. $I_t(i) = 0$) et il existe $t' \in \text{Supp}(i)$ tel que $J_t(i - e_{t'}) = 1$.

(4.2.3) Soit $J = \{J_t, 2 \leq t \leq s\}$ (resp. $I = \{I_t, 1 \leq t \leq s-1\}$) une famille (resp. co-famille) dans N^S , de valeurs de base $\{n_t$ (resp. n_t^*), $1 \leq t \leq s\}$. On note

$$\mathcal{Q}(J) \text{ (resp. } \mathcal{Q}(I))$$

l'ensemble $\{n_1 e_1\} \cup \{i = i' + J_t(i')e_t, i' \in D_t, 2 \leq t \leq s\}$

(resp. $\{n_s e_s\} \cup \{i = i' + I_t(i')e_t, i' \in D_t^*, 1 \leq t \leq s-1, t' \in \text{Supp}(i'), I_t(i') \leq k < I_t(i' - e_{t'}), \}$,

et $\mathcal{G}(J)$ (resp. $\mathcal{G}(I)$) l'ensemble

$$\{n_1 e_1\} \cup \{i = i' + J_t(i'), i' \in D_t, 2 \leq t \leq s, \forall t' \in \text{Supp}(i'), J_t(i' - e_{t'}) = J_t(i') + 1$$

$$(\text{resp. } \{n_s^* e_s\} \cup \{i = i' + I_t(i'), i' \in D_t^*, 1 \leq t \leq s-1\}).$$

(4.2.4) Soit J (resp. I) une famille (resp. co-famille) dans N^S , de valeurs de base $(n_t$ (resp. n_t^*), $1 \leq t \leq s$). Si J (resp. I) vérifie les conditions (FC.1) et (FC.3) (resp. (CFC.1) et (CFC.3)), en particulier si J (resp. I) est caractéristique, il est facile de vérifier que : La partition canonique de N^S définie par $\mathfrak{L}(J)$ (resp. $\mathfrak{L}(I)$) est la même que celle définie par $\mathcal{G}(J)$ (resp. $\mathcal{G}(I)$) et $\mathfrak{L}(J)$ (resp. $\mathfrak{L}(I)$) est l'ensemble des points limites de cette partition alors que $\mathcal{G}(J)$ (resp. $\mathcal{G}(I)$) est l'ensemble de ses points générateurs.

La partition canonique précédente de N^S est dite, par abus de langage, partition canonique de N^S définie par J (resp. I).

(4.2.5) Soient $J = \{J_t, 2 \leq t \leq s\}$ une famille caractéristique dans N^S et $I = \{I_t, 1 \leq t \leq s-1\}$ une co-famille caractéristique dans N^S . On dit que le couple $\{J, I\}$ est une bi-famille caractéristique dans N^S , si les partitions canoniques de N^S définies par J et par I sont les mêmes, autrement dit (4.2.4) si l'on a $\mathfrak{L}(J) = \mathfrak{L}(I)$ et $\mathcal{G}(J) = \mathcal{G}(I)$.

Remarque. Les égalités précédentes prouvent que, si $\{J, I\}$ est une bi-famille caractéristique dans N^S et si $(n_t, 1 \leq t \leq s)$ (resp. $(n_t^*, 1 \leq t \leq s)$) est l'ensemble des valeurs de base de J (resp. I) on a

$$n_t = n_t^* \quad (1 \leq t \leq s).$$

Les entiers $n_t = n_t^*$, $(1 \leq t \leq s)$ sont dits valeurs de base de la bi-famille caractéristique $\{J, I\}$.

(4.2.6) Soit E un sous-ensemble de N^S de type ML (resp. NG) de points de base $\{n_t e_t, 1 \leq t \leq s\}$ (4.1) tel que E soit de préévaluation (4.1.3) et vérifie la condition (2) (4.1.9). Si $J = \{J_t, 2 \leq t \leq s\}$ et $I = \{I_t, 1 \leq t \leq s-1\}$ désignent les suites de fonctions associées à E (4.1.8) alors la proposition (4.1.8), les remarques 2 (4.1.10), (4.1.12), les lemmes (4.1.11) et (4.1.12) montrent que le couple $\{J, I\}$ est une bi-famille caractéristique dans N^S de valeurs de base

$\{n_t, 1 \leq t \leq s\}$. Donc si E est de type ML, on a $E = \mathfrak{L}(J) = \mathfrak{L}(I)$. On aura $E = \mathcal{G}(J) = \mathcal{G}(I)$, si E est de type NG.

Inversement, si on se donne une bi-famille caractéristique (dans N^S) $\{J, I\}$, de valeurs de base $\{n_t, 1 \leq t \leq s, n_s \geq 2\}$, on vérifie facilement que $E = \mathfrak{L}(J) = \mathfrak{L}(I)$ (resp. $E' = \bigcup_j (J) = \bigcup_j (I)$) est un sous-ensemble de N^S de type ML (resp. MG) de points de base $(n_t e_t, 1 \leq t \leq s)$ tel qu'en outre E (resp. E') soit de préévaluation.

Comme les valeurs de base $(n_t, 1 \leq t \leq s)$ d'une bi-famille caractéristique (dans N^S) $\{J, I\}$ sont telles que $n_t \geq n_{t+1}$ ($1 \leq t \leq s-1$), on peut toujours supposer sans perte de généralité (4.1.10) que l'ensemble E (resp. E'), défini précédemment par $\{J, I\}$, vérifie aussi la condition (2) (4.1.9). Dans la suite, les bi-familles caractéristiques que l'on considérera seront supposées telles que le sous-ensemble E (resp. E') précédent vérifie la condition (2) (4.1.9). Cela étant, on peut énoncer le résultat suivant.

Théorème : Soit E un sous-ensemble de N^S . Les conditions suivantes sont équivalentes.

1. E est de type ML (resp. MG) de points de base $(n_t e_t, 1 \leq t \leq s)$, de préévaluation et vérifie la condition (2) (4.1.9).
2. Il existe une bi-famille caractéristique $\{J, I\}$ de N^S de valeurs de base $(n_t, 1 \leq t \leq s, n_s \geq 2)$ telle que $E = \mathfrak{L}(J) = \mathfrak{L}(I)$ (resp. $E = \bigcup_j (J) = \bigcup_j (I)$). Les familles J et I n'étant autre chose que celles associées à E dans (4.1.8).

Le théorème résulte directement de ce qui précède. La condition $n_s \geq 2$ assure que l'on a $0 \notin E$ (resp. E').

(4.2.7) Remarques. 1. Le théorème (4.2.6) montre que le problème, posé dans (4.1), que l'on se propose de résoudre, se ramène à celui de la recherche d'autres invariants liés aux bi-familles caractéristiques dans N^S , de valeurs de base données $(n_t, 1 \leq t \leq s, n_s \geq 2)$.

2. Le même théorème (4.2.6) montre que l'étude d'une bi-famille caractéristique $\{J, I\}$ dans N^S ($\mathfrak{L}(J) = \mathfrak{L}(I)$ et $\bigcup_j (J) = \bigcup_j (I)$) se réduit à celle de sa famille caractéristique J ou à celle de sa co-famille caractéristique I .

A cause de la simplicité du graphe des fonctions J_t (FC.1) et de celle de la condition (FC.2) on choisit d'étudier les familles caractéristiques dans N^S , de valeurs de base données $(n_t, 1 \leq t \leq s, n_s \geq 2)$.

§ (4.3) Etude des familles caractéristiques dans N^S de valeurs de base $(n_t, 1 \leq t \leq s, n_s \geq 1)$. (Recherche de certains de leurs invariants).

(4.3.1) Soit $J^{(s)} = \{J_t^{(s)}, 2 \leq t \leq s\}$ une famille caractéristique dans N^S , de valeurs de base données $(n_t, 1 \leq t \leq s, n_s \geq 2)$. Il est clair que la famille

$$J^{(s)}(s-1) = \{J_t^{(s)}, 2 \leq t \leq s-1\}$$

est une famille caractéristique dans N^{s-1} , de valeurs de base

$(n_t, 1 \leq t \leq s-1, n_{s-1} \geq 2)$.

(4.3.2) Soit $J^{(s)} = \{J_t^{(s)}, 2 \leq t \leq s\}$ une famille caractéristique dans N^S , de valeurs de base $(n_t, 1 \leq t \leq s, n_s \geq 2)$. On note

$n_{t,k}$ ($1 \leq t \leq s-1, 0 \leq k \leq n_s-1$) le plus petit entier tel que $J_s^{(s)}(n_{t,k} e_t) = k$,

$D_2^{(s-1,k)}$ ($0 \leq k \leq n_s-1$) l'ensemble $\{i \in N^1, 0 \leq i_1 \leq n_{1,k}\}$,

$J_2^{(s-1,k)}$ ($0 \leq k \leq n_s-1$) la fonction définie sur $D_2^{(s-1,k)}$ telle que, pour tout $i \in D_2^{(s-1,k)}$, l'entier $J_2^{(s-1,k)}(i)$ soit le plus petit tel que

$J_s^{(s)}(i + J_2^{(s-1,k)}(i) e_2) = k$, $D_t^{(s-1,k)}$ ($0 \leq k \leq n_s-1, 3 \leq t \leq s-1$) l'ensemble

$\{i \in N^{t-1}, i = i' + l e_{t-1}, i' \in D_{t-1}^{(s-1,k)}, 0 \leq l \leq J_{t-1}^{(s-1,k)}(i')\}$

$J_t^{(s-1,k)}$ ($0 \leq k \leq n_s-1, 3 \leq t \leq s-1$) la fonction définie sur $D_t^{(s-1,k)}$ telle que, pour tout $i \in D_t^{(s-1,k)}$ l'entier $J_t^{(s-1,k)}(i)$ soit le plus petit entier tel que

$$J_s^{(s)}(i + J_t^{(s-1,k)}(i) e_t) = k,$$

$J^{(s-1,k)}$ ($0 \leq k \leq n_s-1$) l'ensemble $\{J_t^{(s-1,k)}, 2 \leq t \leq s-1\}$.

Comme $J^{(s)} = \{J_t^{(s)}, 2 \leq t \leq s\}$ est une famille caractéristique dans N^S , on voit que les entiers $n_{t,k}$, les sous-ensembles $D_t^{(s-1,k)}$, les fonctions $J_t^{(s-1,k)}$, enfin les ensembles $J^{(s-1,k)}$ précédents sont bien définis et on vérifie facilement que

(1) L'ensemble $J^{(s-1,0)}$ est égal à l'ensemble $J^{(s)}(s-1)$ donc d'après (4.3.1) $J^{(s-1,0)}$ est une famille caractéristique dans N^{s-1} de valeurs de base $(n_{t,0} = n_t, 1 \leq t \leq s-1)$.

$$(2) \quad n_{t,k} > n_{t,k+1} \quad (1 \leq t \leq s-1, 0 \leq k \leq n_s-2)$$

$$(3) \quad n_{t,k} \geq n_{t+1,k} \quad (1 \leq t \leq s-2, 0 \leq k \leq n_s-1)$$

(4) Pour tout t' ($1 \leq t' \leq t-1$), pour tout $i \in D_t^{(s-1,k)}$ tel que $i+e_{t'} \in D_t^{(s-1,k)}$

$$\text{on a} \quad 0 \leq J_t^{(s-1,k)}(i) - J_t^{(s-1,k)}(i+e_{t'}) \leq 1$$

$$(5) \quad J_t^{(s-1,k)}(\dot{0}) = n_{t,k}, \quad J_2^{(s-1,k)}(n_{1,k}e_1) = 0, \quad J_2^{(s-1,k)}((n_{1,k}-1)e_1) = 1$$

en outre si $t \geq 3$, pour tout $i \in D_t^{(s-1,k)}$ tel que $i = i' + J_{t-1}^{(s-1,k)}(i') (i' \in D_{t-1}^{(s-1,k)})$ on a $J_t^{(s-1,k)}(i) = 0$ et il existe $t' \in \text{Supp}(i)$ tel que $J_t^{(s-1,k)}(i-e_{t'}) = 1$.

(6) Pour tout k ($0 \leq k \leq n_s-1$) l'ensemble $J^{(s-1,k)}$ est une famille dans N^{s-1} , de valeurs de base $(n_{t,k}, 1 \leq t \leq n_s-1)$.

(4.3.3) Soit $J^{(s)} = \{J_t^{(s)}, 2 \leq t \leq s\}$ une famille caractéristique dans N^s de valeurs de base $(n_t, 1 \leq t \leq s)$. D'après (6) (4.3.2), $J^{(s-1,k)} (0 \leq k \leq n_s-1)$ est une famille dans N^{s-1} , (4) et (5) (4.3.2) montrent que la famille $J^{(s-1,k)}$ dans N^{s-1} vérifie les conditions (FC.1) et (FC.3). Comme conséquence d'un résultat plus général que l'on établira plus tard, on verra que les familles $J^{(s-1,k)}$ vérifient aussi la condition (FC.2) donc seront des familles caractéristiques dans N^{s-1} de valeurs de base $(n_{t,k}, 1 \leq t \leq s-1)$; pour $k = 0$ ce résultat est déjà acquis ((1) (4.3.2)).

(4.3.4) Soit E un sous-ensemble de N^s . Pour simplifier les notations et s'il n'en résulte aucune confusion (par exemple si s est fixé) on écrira $\text{int}.E$ (resp. $\text{ext}.E$) au lieu de $N_{\text{int}}^s(E)$ (resp. $N_{\text{ext}}^s(E)$).

Cela étant, si $J^{(s)} = \{J_t^{(s)}, 2 \leq t \leq s\}$ est une famille caractéristique dans N^s et si l'on considère les familles $J^{(s-1,k)} (0 \leq k \leq n_s-1)$ dans N^{s-1} , on vérifie facilement que pour tout k ($0 \leq k \leq n_s-2$) on a

$$(1) \quad \mathfrak{A}(J^{(s-1,k+1)}) \subseteq \text{int}.\mathfrak{A}(J^{(s-1,k)}),$$

$$(2) \quad J_s^{(s)}(i) = 0 \iff i \in \mathfrak{A}(J^{(s-1,0)}) = D_s^{(0)},$$

$$(3) J_s^{(s)}(i) = n_s \iff i \in \text{int.} \mathfrak{A}(J^{(s-1, n_s-1)}) = D_s^{(n_s)},$$

(4) Pour tout k tel que $1 \leq k \leq n_s - 1$, on a

$$J_s^{(s)}(i) = k \iff i \in \text{ext.} \mathfrak{A}(J^{(s-1, k)}) \cap \text{int.} \mathfrak{A}(J^{(s-1, k-1)}) = D_s^{(k)}.$$

Les équivalences (2), (3) et (4) précédentes montrent que l'on a

$$(5) D_s = \bigcup_{0 \leq k \leq n_s} D_s^{(k)}$$

(4.3.5) Les équivalences (2), (3), (4) et l'égalité (5) montrent que si

$J^{(s)} = \{J_t^{(s)}, 2 \leq t \leq s\}$ est une famille caractéristique dans N^s de valeurs de base $(n_t, 1 \leq t \leq s)$, la fonction $J_s^{(s)}$ est déterminée par la donnée des familles $J^{(s-1, k)}$ ($0 \leq k \leq n_{s-1}$) qui définissent les sous-ensembles $D_s^{(k)}$ ($0 \leq k \leq n_s$).

Comme tout point de $\mathfrak{A}(J^{(s)})$ peut se mettre sous la forme

$$i + J_s^{(s)}(i) e_s \text{ où } i \text{ est un point de } D_s^{(k)},$$

ce qui précède prouve que le sous-ensemble $\mathfrak{A}(J^{(s)})$ ou ce qui est équivalent, la famille $J^{(s)}$ est déterminée par la donnée des familles $J^{(s-1, k)}$ ($0 \leq k \leq n_{s-1}$).

(4.3.6) On sait (proposition (4.1.15) et théorème (4.1.6)) que, si

$J^{(s)} = \{J_t^{(s)}, 2 \leq t \leq s\}$ est une famille caractéristique dans N^s alors le sous-ensemble $\mathfrak{A}(J^{(s)})$ vérifie la condition (PV.5) (4.1.15). Mais cela entraîne que les sous-ensembles $\mathfrak{A}(J^{(s-1, k)})$ ($0 \leq k \leq n_{s-1}$) vérifient la condition suivante.

(DR) Quelles que soient les translations T_1 et T_2 de Z^{s-1} , quels que soient les entiers k_1, k_2, k_3, k_4 tels que $0 \leq k_1, k_2, k_3, k_4 \leq n_{s-1}$ et $k_1 - k_2 = k_3 - k_4$, on a

$$(a) T_1(\text{ext.}(\mathfrak{A}(J^{(s-1, k_1)}))) \cap T_2(\text{int.}(\mathfrak{A}(J^{(s-1, k_2)}))) \neq \emptyset$$



$$(b) T_1(\text{int.}(\mathfrak{A}(J^{(s-1, k_3)}))) \cap T_2(\text{ext.}(\mathfrak{A}(J^{(s-1, k_4)}))) = \emptyset$$

Si la condition (DR) n'est pas satisfaite, il existera des translations T_1 et T_2 de Z^{s-1} , des entiers k_1, k_2, k_3, k_4 choisis comme dans la condition (DR) tels que les sous-ensembles dans (a) et (b) (DR) soient non vides en même temps.

Comme toute translation de Z^{s-1} peut être considérée comme translation dans Z^s de s-ième composante nulle et comme les translations dans Z^s commutent entre elles, ce qui précède entraîne

$$(2) \quad (k_2 - k_1)e_s \circ T_1 \left(\text{ext.}(k_1 e_s(\mathfrak{A}(J^{(s-1,k_1)}))) \right) \cap T_2 \left(\text{int.}(k_2 e_s(\mathfrak{A}(J^{(s-1,k_2)}))) \right) \neq \emptyset$$

et

$$\text{int}(k_4 - k_3)e_s \circ T_1 \left(\text{int.}(k_3 e_s(\mathfrak{A}(J^{(s-1,k_3)}))) \right) \cap T_2 \left(\text{ext.}(k_4 e_s(\mathfrak{A}(J^{(s-1,k_4)}))) \right) \neq \emptyset.$$

Mais les sous-ensembles $k_r e_s(\mathfrak{A}(J^{(s-1,k_r)}))$, $r=1,2,3,4$ sont des parties de $\mathfrak{A}(J^{(s)})$ ((2), (3), (4) et (5) (4.3.4)). Comme par hypothèse $k_2 - k_1 = k_4 - k_3$, les conditions (2) précédentes montrent que $(k_2 - k_1)e_s \circ T_1(\mathfrak{A}(J^{(s)}))$ et $T_2(\mathfrak{A}(J^{(s)}))$ se traversent ; mais cela est absurde car $\mathfrak{A}(J^{(s)})$ vérifie la condition (PV.5).

Inversement, on se donne un ensemble $\{J^{(s-1,k)}, 0 \leq k \leq n_s - 1\}$ de familles dans N^{s-1} telles que pour tout k la famille $J^{(s-1,k)}$ vérifie les conditions (FC.1), (FC.3) l'ensemble des familles vérifiant la condition (1) (4.3.4) et la condition (DR).

Si $J_s^{(s)}$ désigne la fonction définie sur $D_s = \bigcup_{0 \leq k \leq n_s} D_s^{(k)}$ (où les $D_s^{(k)}$ sont définis par les $J^{(s-1,k)}$ (4.3.4)) telle que $J_s^{(s)}(i) = k$ ($0 \leq k \leq n_s$) $\iff i \in D_s^{(k)}$

on montre que l'ensemble $\{i = i' + J_s^{(s)}(i')e_s, i' \in D_s\}$ vérifie la condition (PV.5).

S'il en était autrement, il existerait des entiers k_1, k_2, k_3, k_4 ($0 \leq k_1 \leq k_2 \leq k_3 \leq k_4 \leq n_s$) et des translations T_1, T_2 de Z^s tels que si $\bar{T}_1$ et $\bar{T}_2$ sont les projections respectives sur Z^{s-1} de T_1 et T_2 et si $l(T_1), l(T_2)$ désignent les s-ièmes composantes respectives de T_1 et T_2 on ait

$$(3) \quad (k_1 + l(T_1))e_s \left(\bar{T}_1(\text{ext.}(D_s^{(k_1)})) \right) \cap (k_2 + l(T_2))e_s \left(\bar{T}_2(\text{int.}(D_s^{(k_2)})) \right) \neq \emptyset$$

et

$$(k_3 + l(T_1))e_s \left(\bar{T}_1(\text{int.}(D_s^{(k_3)})) \right) \cap (k_4 + l(T_2))e_s \left(\bar{T}_2(\text{ext.}(D_s^{(k_4)})) \right) \neq \emptyset.$$

Les relations (3) impliquent d'une part

$$(4) \quad \begin{aligned} k_1+1(T_1) &= k_2+1(T_2) \\ \text{et} \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad (5) \quad k_1-k_2 = k_3-k_4, \\ k_3+1(T_1) = k_4+1(T_2)$$

d'autre part

$$(6) \quad \begin{aligned} \bar{T}_1(\text{ext.}(D_s^k 1)) \cap \bar{T}_2(\text{int.}(D_s^k 2)) &\neq \emptyset \\ \text{et} \\ \bar{T}_1(\text{int.}(D_s^k 3)) \cap \bar{T}_2(\text{ext.}(D_s^k 4)) &\neq \emptyset. \end{aligned}$$

Si l'on tient compte de la définition des sous-ensembles D_s^k ($0 \leq k \leq n_s$), les conditions (5) et (6) montrent que l'on n'a pas la condition (DR).

On a ainsi établi le résultat suivant.

Proposition. Soit $J^{(s)} = \{J_t^{(s)}, 2 \leq t \leq s\}$ une famille dans N^s de valeurs de base $(n_t, 1 \leq t \leq s)$ telle que

1. Pour tout k ($0 \leq k \leq n_s - 1$), l'ensemble $J^{(s-1,k)}$ soit une famille dans N^{s-1} vérifiant les conditions (FC.1), (FC.3) et (1) (4.3.4).
2. Pour tout k ($0 \leq k \leq n_s$) on ait $J_s^{(s)}(i) = k \Longleftrightarrow i \in D_s^{(k)}$.

L'ensemble $\text{Gr}(J_s^{(s)}) = \mathfrak{A}(J^{(s)})$ vérifie la condition (PV.5) si et seulement si l'ensemble $\mathfrak{C}^{(s-1)}(J^{(s)}) = \{J^{(s-1,k)}, 0 \leq k \leq n_s - 1\}$ vérifie la condition (DR).

Remarques. 1. La proposition précédente prouve que si $J^{(s)} = \{J_t^{(s)}, 2 \leq t \leq s\}$ est une famille caractéristique dans N^s , pour tout k ($0 \leq k \leq n_s - 1$) la famille $J^{(s-1,k)}$ (dans N^{s-1}) est telle que le sous-ensemble $\mathfrak{A}(J^{(s-1,k)})$ vérifie la condition (PV.5). Pour le voir, il suffit d'appliquer la proposition en posant, dans la condition (DR), $k_1 = k_2 = k_3 = k_4$. Cela prouve, comme on l'avait annoncé, que $J^{(s-1,k)}$ vérifie aussi la condition (FC.2) donc est une famille caractéristique dans N^{s-1} . En effet, on a vu dans (4.3.3) que la famille $J^{(s-1,k)}$ vérifie les conditions (FC.1) et (FC.3).

2. Les données étant celles de la remarque 1, la proposition précédente prouve aussi que l'on a la condition suivante.

Quelles que soient les translations T_1 et T_2 de Z^{s-1} , quels que soient les entiers k_1 et k_2 ($0 \leq k_1, k_2 \leq n_s - 1$), les sous-ensembles $T_1(\mathcal{G}(J^{(s-1,k_1)}))$ et $T_2(\mathcal{G}(J^{(s-1,k_2)}))$ ne se traversent pas. Il suffit d'appliquer la proposition en posant $k_1 = k_3$ et $k_2 = k_4$.

(4.3.7) Définition. Un ensemble $\mathcal{G}^{(s-1)} = \{J^{(s-1,k)}, 0 \leq k \leq n_s - 1\}$ de familles dans N^{s-1} sera dit cohérent s'il vérifie les conditions suivantes.

1. (1) (4.3.4)
2. (DR) (4.3.6)
3. Pour tout k ($0 \leq k \leq n_s - 1$) la famille $J^{(s-1,k)}$ vérifie les conditions (FC.1) et (FC.3).

La remarque 1 (4.3.6) prouve que dans la définition précédente, on peut supposer que les familles $J^{(s-1,k)}$ sont caractéristiques, vérifiant les conditions 1 et 2. C'est d'ailleurs sous cette dernière forme que l'on considérera la définition des ensembles cohérents dans N^{s-1} ($2 \leq s < +\infty$).

Proposition. Soit $J^{(s)} = \{J_t^{(s)}, 2 \leq t \leq s\}$ une famille dans N^s de valeurs de base $(n_t, 1 \leq t \leq s)$. La famille $J^{(s)}$ est caractéristique si et seulement s'il existe un ensemble $\mathcal{G}^{(s-1)} = \{J^{(s-1,k)}, 0 \leq k \leq n_s - 1\}$ cohérent dans N^{s-1} tel que la fonction $J_s^{(s)}$ soit définie à partir des $J^{(s-1,k)}$ comme dans (4.3.4) et la famille $J^{(s)}$ soit égale à la famille $\{J^{(s-1,0)}, J_s^{(s)}\}$.

Le si résulte de (4.3.4), (4.3.5), (4.3.6) (proposition). Si $\mathcal{G}^{(s-1)} = \{J^{(s-1,k)}, 0 \leq k \leq n_s - 1\}$ est un ensemble cohérent dans N^{s-1} , on vérifie facilement que $\{J^{(s-1,0)}, J_s^{(s)}\}$ (où $J_s^{(s)}$ est la fonction définie par les $J^{(s-1,k)}$ (4.3.4)) est une famille dans N^s et la fonction $J_s^{(s)}$ vérifie les conditions (FC.1), (FC.3). La proposition (4.3.6) prouve alors que la fonction $J_s^{(s)}$ vérifie aussi la condition (FC.2). On a ainsi montré que l'on a le seulement si, d'où la proposition.

(4.3.8) Soient $J^{(s)} = \{J_t^{(s)}, 2 \leq t \leq s\}$ une famille caractéristique dans N^s de valeurs de base $(n_t, 1 \leq t \leq s)$, $\mathcal{G}^{(s-1)} = \{J^{(s-1,k)}, 0 \leq k \leq n_s - 1\}$ l'ensemble cohérent dans N^{s-1} défini par $J^{(s)}$.

Rappelons que les entiers $n_{s-1,k}$ ($0 \leq k \leq n_s - 1$) sont les plus petits tels que $J_s^{(s)}(n_{s-1,k} e_{s-1}) = k$ donc pour tout k ($0 \leq k \leq n_s - 1$) les points $n_{s-1,k} e_{s-1} \in D_s^{(k)}$.

Cela étant, on note $J_{s-1,s}^{(s)}$ la fonction définie sur l'ensemble $\{i \in {}^{s-2}N \cap N^{s-1}, 0 \leq i_{s-1} \leq n_{s-1,0} = n_{s-1}\}$ telle que pour tout k ($0 \leq k \leq n_s$) l'on ait

$$J_{s-1,s}^{(s)}(i) = k \iff J_s^{(s)}(i) = k.$$

Comme la famille $J^{(s)}$ est caractéristique, ou ce qui est équivalent, comme l'ensemble $\mathcal{C}^{(s-1)}$ est cohérent et $J_s^{(s)}$ est définie à partir des $J^{(s-1,k)}$ (4.3.4), si l'on identifie ${}^{s-2}N \cap N^{s-1}$ et N , on vérifie facilement que, $J_{s-1,s}^{(s)}$ est une famille caractéristique dans N^2 de valeurs de base (n_{s-1}, n_s) et l'ensemble $\{(n_{s-1,k}, k), 0 \leq k \leq n_s - 1\} \cup \{(0, n_s)\}$ est l'ensemble des points générateurs de $\mathcal{Q}(J_{s-1,s}^{(s)})$.

Le but final de cette étude serait la caractérisation des anneaux nilmoniques prévaluables $A = A'[\alpha_1, \dots, \alpha_s]^{(1)}$, en donnant, d'une certaine façon, les familles caractéristiques associées à leur idéal d'annulation $\mathfrak{J}$. Dans ce qui va suivre, on cherchera à caractériser les ensembles $\mathcal{ML}(\mathfrak{J})$ de manière plus synthétique et géométrique en mettant en évidence des invariants de ces ensembles autres que leurs familles caractéristiques. Toutefois, dans chaque cas particulier, ces dernières pourront se déterminer facilement à partir de ces nouveaux invariants. Dans certains cas (en particulier si $s = 2$) ces familles ou des invariants qui leur sont assez voisins pourront être reliées aux nouveaux invariants d'une manière assez explicite.

(1) On dit qu'un anneau nilmonique $A = A'[\alpha_1, \dots, \alpha_s]$ est prévaluable si l'idéal d'annulation $\mathfrak{J}$ associé à A est tel que $\mathcal{ML}(\mathfrak{J})$ soit de préévaluation dans $M(A'[X_1, \dots, X_s])$.

HYPERSURFACES INDEFINIES LIMITES DANS Z^s ($2 \leq s < +\infty$)

§ (5.1) - GENERALITES.

(5.1.1) Définition. Soit Z^s le produit cartésien de s "droites entières", où en plus on fixe l'ordre des facteurs en fixant l'indexation des coordonnées des points $z = (z_1, \dots, z_s) \in Z^s$. On appelle hypersurface indéfinie limite tout $E \subseteq Z^s$ tel que :

$$E = \{z = (z_1, \dots, z_{s-1}, z_s = j_s((z_1, \dots, z_{s-1}))) ; (z_1, \dots, z_{s-1}) \in Z^{s-1}\}$$

où $j_s : Z^{s-1} \longrightarrow Z$ est une fonction définie sur Z^{s-1} à valeurs sur Z , telle que les conditions suivantes soient satisfaites.

1° Pour tout $\bar{z} \in Z^{s-1}$, pour tout entier t tel que $1 \leq t \leq s-1$, on a

$$0 \leq j_s(\bar{z}) - j_s(\bar{z} + e_t) \leq 1.$$

2° Pour tout $\bar{z} \in Z^{s-1}$, pour tout couple (t, t') d'entiers tels que $1 \leq t \leq t' \leq s-1$, on a

$$j_s(\bar{z} + e_t) \geq j_s(\bar{z} + e_{t'}).$$

3° Toute parallèle (passant par un point de Z^s) à tout axe rencontre E .

La fonction j_s est dite première fonction caractéristique de E .

Remarques. 1. Soit t un entier tel que $1 \leq t \leq s$ et soit $(\tilde{Z}^s)_t$ le sous-espace de Z^s engendré par les e_i ($i = 1, 2, \dots, s$) autres que e_t ($(\tilde{Z}^s)_s = Z^{s-1}$).

Si $z = (z_1, \dots, z_{t-1}, 0, z_{t+1}, \dots, z_s)$ est un point de $(\tilde{Z}^s)_t$, la droite $z + xe_t$ passant par z et parallèle à Z_t rencontre E (condition 3° précédente). Soit $(z_1, \dots, j_t^*(z), z_{t+1}, \dots, z_s)$ le point de l'intersection précédente dont la t -ième coordonnée est la plus petite possible. La condition 1° précédente montre que j_t^* (j_s^* n'est autre chose que la fonction j_s de la définition précédente) est une fonction décroissante au sens large (pour l'ordre $\leq_p$ restreint à $(\tilde{Z}^s)_t$) et, s'il existe un entier t tel que $1 \leq t \leq s$ et $j_t^*(0) > 0$, alors, on a $j_t^*(0) > 0$, pour tout entier t tel que $1 \leq t \leq s$.

2. Si l'on partage l'ensemble $\{1, 2, \dots, s\}$ de n'importe quelle façon en deux sous-ensembles disjoints Σ' et Σ'' , donc, si on décompose Z^s en un produit $Z^{\Sigma'} \times Z^{\Sigma''}$, alors, pour tout $z' \in Z^{\Sigma'}$, la projection sur $Z^{\Sigma''}$ (où l'ordre des

coordonnées est induit par celui de Z^S) de $(\{z'\} \times Z^{\Sigma''}) \cap E$ est une hypersurface indéfinie limite de $Z^{\Sigma''}$. En particulier, si $\bar{j}_t^* = j_t^* \mid Z^{t-1}$ ($2 \leq t \leq s$), où j_t^* est la fonction définie dans la remarque 1, le sous-ensemble

$\{(z_1, \dots, z_{t-1}, z_t = \bar{j}_t^*((z_1, \dots, z_{t-1}))) ; (z_1, \dots, z_{t-1}) \in Z^{t-1}\}$ est une hypersurface indéfinie limite dans Z^t (pour $t = s$ on a $\bar{j}_s^* = j_s^* = j_s$), on pose $\bar{j}_1^* = j_1^*$.

Pour tout t tel que $1 \leq t \leq s$, la fonction $\bar{j}_t^*$ est dite $(s-t+1)$ -ième fonction caractéristique de E , on retrouve ainsi la première fonction caractéristique de la définition précédente.

Les fonctions caractéristiques précédentes ainsi que les fonctions à partir desquelles elles sont définies dépendent bien entendu de l'ensemble E , ces fonctions sont cependant notées sans aucune mention de l'ensemble E . Cette omission n'entraîne pas de confusion quand on ne considère qu'un seul ensemble E . Si aucune confusion n'est à craindre, on adoptera les notations précédentes.

(5.1.2) Soit E une hypersurface indéfinie limite dans Z^S . On appelle "intérieure" (resp. "extérieure") de E et on note $\text{int.}E$ (resp. $\text{ext.}E$) l'ensemble des points $(z_1, \dots, z_s) \in Z^S$ tels que $z_s < j_s((z_1, \dots, z_{s-1}))$ (resp. $z_s \geq j_s((z_1, \dots, z_{s-1}))$).

On pose $\overline{\text{int.}E} = \text{int.}E \cup E$, c'est-à-dire l'ensemble des $z = (z_1, \dots, z_s) \in Z^S$ tels que $z_s \leq j_s((z_1, \dots, z_{s-1}))$.

Remarques. 1. Les conditions 1° et 2° (définition (5.1.1)) montrent que, si t et t' sont des entiers tels que $1 \leq t < t' \leq s$, pour tout $z \in Z^S$ on a
 $z + e_t \in \text{ext.}E \implies z + e_{t'} \in \text{ext.}E$, ce qui équivaut à
 $z - e_t \in \text{int.}E \implies z - e_{t'} \in \text{int.}E$.

2. Soit $T = (t_1, \dots, t_s) \in Z^S$. Il est clair qu'un sous-ensemble E de Z^S est une hypersurface indéfinie limite si et seulement si sa translatée $T + E$ l'est aussi et on a

$$\text{int.}(T+E) = T + \text{int.}E \quad \text{et} \quad \text{ext.}(T+E) = T + \text{ext.}E.$$

En effet, $T + E$ n'est autre chose que le sous-ensemble de Z^S formé des points $(z_1, \dots, z_{s-1}, z_s = j_{s,T}((z_1, \dots, z_{s-1}))) \in Z^S$, où $j_{s,T}$ est la fonction définie sur Z^{s-1} à valeurs sur Z , telle que

$$j_{s,T}((z_1, \dots, z_{s-1})) = j_s((z_1 - t_1, z_2 - t_2, \dots, z_{s-1} - t_{s-1})) + t_s$$

(5.1.3) Soit E une hypersurface indéfinie limite dans Z^S . Un quadruple (z_1, z_2, z_3, z_4) de points de Z^S est encore dit irrégulier pour E, si l'on a

$$1^\circ \quad z_1 - z_2 = z_3 - z_4$$

et

$$2^\circ \quad z_1 \in \text{int.}E \text{ et } z_2 \in \text{ext.}E \text{ alors que } z_3 \in \text{ext.}E \\ \text{et } z_4 \in \text{int.}E$$

(5.1.4) Soit E une hypersurface indéfinie limite dans Z^S et soient $T, T' \in Z^S$.

On dira encore que les translatées $T + E$ et $T' + E$ de E ne se traversent pas, si l'on a

(1) ou bien $T' + E \subseteq T + \overline{\text{int.}E} = \overline{\text{int.}(T+E)}$ ou bien $T' + E \subseteq T + \text{ext.}E = \text{ext.}(T+E)$ (on voit que cela équivaut à dire que $(T' - T) + E$ et E ne se traversent pas, donc, pour E fixé, cette propriété ne dépend en fait que de $T' - T$).

Remarque. La condition (1) précédente est symétrique par rapport à T et T', car on a

$$T' + E \subseteq T + \overline{\text{int.}E} \iff T + E \subseteq T' + \text{ext.}E.$$

En effet, supposons que l'inclusion de gauche soit vraie, alors, si $T + E$ n'est pas contenu dans $T' + \text{ext.}E$, il existe un $z \in E$ tel que $T + z \in T' + \text{int.}E$. D'autre part, comme par hypothèse on a $T' + E \subseteq T + \overline{\text{int.}E}$, on doit aussi avoir $T' + \text{int.}E \subseteq T + \text{int.}E$. Car, si $y \in \text{int.}E$, alors pour tout $i = 1, 2, \dots, s$, on a $y + e_i \in \overline{\text{int.}E}$. Donc, pour tout $i = 1, 2, \dots, s$, il existe un entier $x \geq 1$ tel que $y + xe_i \in E$, ce qui implique $xe_i + (T' + y) = T' + (y + xe_i) \in T' + E = T + \overline{\text{int.}E} = \overline{\text{int.}(T + E)}$, ce qui prouve que $T' + y \in \overline{\text{int.}(T + E)}$.

Tandis que si $T' + y \in T + E$, il existe un indice i tel que $(T' + y) + e_i \in T + E$, ce qui implique $T' + y + xe_i \in \overline{\text{int.}(T + E)}$, mais cela est absurde d'après ce qui précède. On a ainsi prouvé que $T' + y \in \overline{\text{int.}(T + E)}$. $\therefore (T + E) = T + \text{int.}E$ (si A et B sont deux ensembles, la notation $A \setminus B$ désigne les éléments de A qui ne sont pas dans B).

On a par conséquent $T + z \in T' + \text{int.}E \subseteq T + \text{int.}E$ et $z \in \text{int.}E$, mais cela est absurde car $z \in E$; on a ainsi prouvé l'implication de gauche à droite.

De même, si l'on suppose que l'inclusion à droite a lieu, on aura

$T' + \text{int}.E = Z^S$. $\cdot (T' + \text{ext}.E) \subseteq Z^S$. $\cdot (T + \text{ext}.E) = T + \text{int}.E$. Mais alors, si $z \in E$, il existe un i tel que $z - e_i \in \text{int}.E$, donc $(T' + z) - e_i = T' + (z - e_i) \in T' + \text{int}.E \subseteq T + \text{int}.E$ et $T' + z = (T' + z - e_i) + e_i \in \overline{(T + \text{int}.E)} = T + \overline{\text{int}.E}$, on a ainsi prouvé la symétrie de la propriété.

(5.1.5) Proposition. Soit E une hypersurface indéfinie limite dans Z^S .

Les conditions suivantes sont équivalentes.

1° Il n'existe pas de points z, z' de Z^S et des translations $T, T' \in Z^S$ tels que $T + z \in \text{int}.E$, $T' + z \in \text{ext}.E$, $T + z' \in \text{ext}.E$, $T' + z' \in \text{int}.E$.

2° Il n'existe aucun quadruple irrégulier pour E .

3° Quel que soit l'entier t ($1 \leq t \leq s$), quel que soit le vecteur $\tilde{h} \in (\tilde{Z}^S)_t$ et quels que soient $x, x' \in (\tilde{Z}^S)_t$, on a

$$|(j_t(x) - j_t(x+h)) - (j_t(x') - j_t(x'+h))| \leq 1.$$

4° Quelles que soient les translations $T, T' \in Z^S$, les translatées $T+E$ et $T'+E$ ne se traversent pas.

Pour la démonstration de cette proposition, il suffit de reprendre les démonstrations des propositions énoncées dans (4.1.5), (4.1.8) et (4.1.15), sauf qu'il n'y a plus de "point à la frontière" comme dans la démonstration de la proposition (4.1.8), car la valeur $j_t^*(x) = 0$ ne joue plus aucun rôle particulier.

(5.1.6) Définition 1. Une hypersurface indéfinie limite E (dans Z^S) vérifiant les conditions équivalentes de la proposition (5.1.5) est dite de préévaluation.

Remarque. Soit E une hypersurface indéfinie limite dans Z^S . On considère une translation T de Z^S . On sait (remarque 2 (5.1.2)) que $E' = T + E$ est une hypersurface indéfinie limite dans Z^S . On suppose que la translation T est telle que

$$\dot{0} \in \text{int.}(T + E) = T + \text{int}.E.$$

Pour tout t tel que $1 \leq t \leq s$ on pose $n_t = j_{t,E}^*(\dot{0})$. Il est clair, par exemple, que n_s est un entier strictement positif (conditions 3° et 1° de la définition (5.1.1)), la remarque 1 (5.1.1) montre alors que n_t est un entier strictement positif, quel que soit t ($1 \leq t \leq s$). En outre, la remarque 1 (5.1.2) montre que les entiers strictement positifs n_t vérifient aussi la condition suivante.

$$n_t \geq n_{t+1} \quad (1 \leq t \leq s-1).$$

Il est clair que la translation T peut être choisie telle que l'on ait $n_s \geq 2$.

Considérons la partition canonique

$$[\text{int.}(N^S \cap (T + \text{ext.}E)), \text{ext.}(N^S \cap (T + \text{ext.}E))]$$

de N^S par son sous-ensemble $N^S \cap (T + \text{ext.}E)$. Soit $\bar{E}'$ l'ensemble des points limites de cette partition. Il est facile de voir que $E' \subseteq \bar{E}'$ est un sous-ensemble de type ML dans N^S , de points de base $n_t e_t$ ($1 \leq t \leq s$), et qu'en outre, $\bar{E}'$ est de préévaluation si E' est de préévaluation, donc si E est de préévaluation ((4.1.2), (4.1.3) et (4.1.15)).

Quand $\bar{E}'$ est de préévaluation, la famille caractéristique définissant $\bar{E}'$ n'est autre chose que la famille $\{\bar{j}_{t,E'}, 2 \leq t \leq s\}$, où pour

tout t ($2 \leq t \leq s$), $\bar{j}_{t,E'}$ désigne la restriction à $\text{int.}(N^S \cap (T + \text{ext.}E))$ de $j_{t,E'}$.

Définition 2. On conserve les données et les notations de la remarque précédente. Un sous-ensemble $\bar{E}'$ de type ML et de préévaluation dans N^S obtenu, comme précédemment, à partir de $E' = T + E$ (donc à partir de E et de T) est dit indéfiniment prolongeable.

§ (5.2) LE GROUPE ORDONNE $\mathcal{G}_E$ (DEFINI PAR UNE HYPERSURFACE INDEFINIE LIMITE).

(5.2.1) Dans tout ce numéro, E désigne une hypersurface indéfinie limite de pré-évaluation dans Z^S . Z^S peut être considéré aussi comme le groupe abélien de ses propres translations, et la donnée de E permet, en vertu de la condition 4° (5.1.5), d'établir un préordre total $\leq_E$ dans cet ensemble de translations, en posant, si t_1 et t_2 sont des translations de Z^S ,

$$t_1 \leq_E t_2$$

si et seulement si $t_1 + E \subseteq t_2 + \overline{\text{int.}E} \iff t_1 + \text{ext.}E \supseteq t_2 + E$ (5.1.4).

Remarques. 1. Il est clair que, quelles que soient les translations t_1, t_2 , $t \in Z^S$, on a

$$t_1 \leq_E t_2 \implies t_1 + t \leq_E t_2 + t.$$

2. Si t_1 et t_2 sont deux translations dans Z^S , on a, à la fois, $t_1 \leq_E t_2$ et $t_2 \leq_E t_1$ si et seulement si $t_1 + E = t_2 + E$.

En effet, on a alors, à la fois, $t_1 + E \subseteq t_2 + \overline{\text{int.}E}$ et $t_1 + E \subseteq t_2 + \text{ext.}E$, ce qui implique $t_1 + E \subseteq t_2 + (\overline{\text{int.}E} \cap \text{ext.}E) = t_2 + E$ et, par symétrie, $t_2 + E \subseteq t_1 + E$.

3. La remarque 2 montre que, si $\sim_E$ est la relation d'équivalence du préordre $\leq_E$, l'ensemble $\mathfrak{N}_E$ des translations $t \in Z^s$ qui sont telles que $t \sim_E 0$ est un sous-groupe de Z^s et comme $t_1 \sim_E t_2 \iff t_1 - t_2 \sim_E 0$ (t_1 et t_2 étant des translations de Z^s), il est clair que les classes (dans Z^s) de l'équivalence $\sim_E$ coïncident avec les classes (mod. $\mathfrak{N}_E$) dans Z^s .

4. Compte tenu de la remarque 3, on voit que le préordre $\leq_E$ induit un ordre total $\leq_E$ sur le groupe additif $\mathcal{G}_E = Z^s / \mathfrak{N}_E$, par rapport auquel ce groupe est un groupe totalement ordonné, car $t_1 \leq_E t_2 \implies t_1 + t \leq_E t_2 + t$.

5. Les groupes abéliens étant considérés comme des Z -modules, si ν_E est le rang de $\mathfrak{N}_E$, $\mathcal{G}_E$ en tant que groupe abstrait, est un groupe abélien de rang $s - \nu_E$.

De plus, ν_E est au plus égal à $s-1$, car si $\nu_E = s$, $\mathcal{G}_E = Z^s / \mathfrak{N}_E$ aurait été un groupe d'ordre fini, donc ne pourrait être ordonné que s'il était réduit à son élément neutre, ce qui aurait entraîné $\mathfrak{N}_E = Z^s$ et

$$\text{et } Z^s = Z^s + E = \mathfrak{N}_E + E = \bigcup_{t \in \mathfrak{N}_E} (t+E) = \bigcup_{t \in \mathfrak{N}_E} E = E, \text{ ce qui est absurde, car}$$

Z^s tout entier n'est pas une hypersurface indéfinie limite.

Dans le cas où $\nu_E = s-1$, l'hypersurface indéfinie limite de pré-valuation E sera dite périodique.

(5.2.2) Il s'agit maintenant d'analyser la structure de $\mathcal{G}_E$ (5.2.1) en tant que groupe totalement ordonné, du moins d'une manière préliminaire. Rappelons, dans ce but, certaines propriétés classiques des groupes totalement ordonnés abéliens.

(A) Soit Γ un groupe abélien totalement ordonné, dont l'opération est écrite additivement et l'élément neutre noté 0. Si Γ_+ désigne la partie de Γ formée de ses éléments strictement positifs (c'est-à-dire des éléments de Γ qui sont strictement supérieurs à 0), on peut considérer dans $\Gamma_+ \cup \{0\}$ le préordre suivant $\sqsubset$:

$$\alpha \sqsubset \beta \iff (\exists n \in \mathbb{N}) [\alpha \leq n\beta].$$

La relation d'équivalence $\equiv$ de ce préordre est appelée la comparabilité de $\Gamma_+ \cup \{0\}$ et la classe (mod. $\equiv$) $C(\gamma)$ d'un $\gamma \in \Gamma_+ \cup \{0\}$ est dite son grade ou sa classe de comparabilité.

Remarques. 1. Il est clair que l'on a $C(0) = \{0\}$. Cette classe sera notée (par abus de notation) 0. On voit par conséquent que Γ_+ est une réunion de classes (mod. $\equiv$).

2. Le préordre $\sqsubset$ induit un ordre strict $\prec$ sur l'ensemble $\Gamma_+ \cup \{0\} / \equiv$ des classes de comparabilité, et on appelle rang ordinal de Γ (noté $ro(\Gamma)$) le type ordinal de l'ensemble ordonné des classes de comparabilité.

(B) Soient Γ un groupe abélien totalement ordonné, $\gamma \in \Gamma$. On appelle valeur absolue de γ et on note $|\gamma|$ le maximum de γ et de $-\gamma$.

Il est clair que, si γ_1 et γ_2 sont des éléments de Γ , on a

$$|\gamma_1 \pm \gamma_2| \leq |\gamma_1| + |\gamma_2| \leq 2 \max(|\gamma_1|, |\gamma_2|).$$

Ainsi, si (C_1, C_2) est une coupure de $M(\Gamma) = \Gamma_+ \cup \{0\} / \equiv = \Gamma_+ / \equiv \cup \{0\}$,

l'ensemble des $\gamma \in \Gamma$ tels que $C(|\gamma|) \in C_1$ est un sous-groupe de Γ qui en forme un intervalle, et de tels sous-groupes sont dits les sous-groupes isolés de Γ . En particulier, si $c \in \Gamma_+ / \equiv$, ce groupe isolé sera noté Γ_c (resp. Γ_{c-}) si $C_1 = \{x \in \Gamma_+ / \equiv \cup \{0\} ; x \leq c\}$ (resp. $C_1 = \{x \in \Gamma_+ / \equiv \cup \{0\} ; x < c\}$).

(C) Soient Γ un groupe abélien totalement ordonné et $\bar{\Gamma}$ un sous-groupe isolé de Γ . Une classe $\gamma + \bar{\Gamma}$ (mod. $\bar{\Gamma}$) dans Γ est un intervalle de Γ . Par suite l'ordre de Γ induit un ordre total sur $\Gamma / \bar{\Gamma}$ et, également, si Γ' est un sous-groupe intermédiaire (même non isolé) entre Γ et $\bar{\Gamma}$, un tel ordre sur $\Gamma' / \bar{\Gamma}$.

En particulier, Γ_c / Γ_{c-} est, de cette manière, un groupe ordonné,

et on voit facilement que tous ses éléments sont comparables. C'est donc un groupe totalement ordonné (noté F_c) tel que $ro(F_c) = 1$; son élément neutre est noté 0_c . (Rappelons que tout groupe ordonné de rang ordinal 1, est isomorphe à un groupe additif de nombres réels), F_c est dit le facteur de Γ de grade c .

(D) Soient Γ un groupe abélien totalement ordonné, $\gamma \in \Gamma$ et c le grade de $|\gamma|$. L'ensemble $\bar{\gamma} = \gamma + \Gamma_{c-}$ est dit le reste squelettique de γ et $\{\bar{\gamma} ; \gamma \in \Gamma\}$ est dit le squelette de Γ et est noté $S(\Gamma)$. Le grade c de γ est dit aussi grade de son reste squelettique. Il est clair qu'en tant qu'ensemble,

$$S(\Gamma) = \{0\} \cup \left[\bigcup_{c \in M(\Gamma)} (F_c \dots \{0_c\}) \right]$$

Comme $\bar{\gamma}$ est un intervalle de Γ , l'ordre de Γ induit un ordre total sur $S(\Gamma)$, qui sera également noté $<$.

On définit aussi sur $S(\Gamma)$ une addition partielle en considérant $\bar{\gamma}_1, \bar{\gamma}_2 \in S(\Gamma)$ comme addibles, si et seulement si leurs grades sont les mêmes ou un au moins d'entre eux est 0, et leur somme sera définie comme dans F_c , si c est leur grade commun ou celui de leurs grades qui n'est pas nul, à condition, toutefois, d'identifier 0_c avec 0.

(E) Soit Γ un groupe abélien totalement ordonné. Un ensemble $\bar{A}$ d'éléments non-nuls de $S(\Gamma)$ est dit libre si, pour tout $c \in M(\Gamma)$, $\bar{A} \cap F_c$ est libre dans F_c .

Soit A un sous-ensemble de Γ . A sera dit squelettiquement libre si les restes squelettiques $\bar{\gamma}$ des $\gamma \in A$ sont tous non-nuls, distincts deux à deux et si en plus, leur ensemble $\bar{A}$ est libre.

On montre que, si $\bar{A}$ est libre, A l'est aussi. Il suffit évidemment de le prouver pour des A finis. Supposons que

$$u = \sum_{a \in A} l_a a \text{ est une combinaison linéaire des éléments de } A$$

A à coefficients entiers rationnels l_a non tous nuls. Comme l'ensemble des grades $c(a)$ $a \in A$ est fini, il existe le plus grand grade c^* tel qu'il y ait un $a \in A$ pour lequel $c(a) = c^*$ et $l_a \neq 0$. Mais alors, si $\bar{a} \in F_{c^*}$, on a

$l_a a \in \Gamma_{c^*}$, donc

$$u \equiv \sum_{a \in A \cap F_{c^*}} l_a a \pmod{\Gamma_{c^*}}$$

et

$$u + \Gamma_{c^*} = \sum_{a \in A \cap F_{c^*}} l_a (a + \Gamma_{c^*}) = \sum_{a \in A \cap F_{c^*}} l_a \bar{a}.$$

Comme les $\bar{a}$ ($a \in A$) appartenant à F_{c^*} y sont libres, on a $u + \Gamma_{c^*} \neq \Gamma_{c^*}$, donc $u \neq 0$, ce qui montre que A est libre.

On appelle c-rang de Γ le rang (linéaire) de F_c .

A_c étant, pour tout $c \neq 0$, un ensemble libre maximal dans F_c ,

$\bar{A} = \bigcup_{c \in M(\Gamma) \dots \{0\}} \bar{A}_c$ est un ensemble libre (d'ailleurs maximal) de $S(\Gamma)$, dont

le cardinal est, de façon évidente, $\sum_{c \in M(\Gamma) \dots \{0\}} r_c(\Gamma)$, où $r_c(\Gamma)$ désigne, comme ce sera toujours le cas, le c -rang de Γ .

Or, si pour tout $\bar{a} \in \bar{A}$ on choisit un $a \in \Gamma$ dont $\bar{a}$ soit le reste squelettique, on obtient ainsi un sous-ensemble squelettiquement libre, donc libre tout court, A de Γ de même cardinalité. On a donc

$$\sum_{c \in M(\Gamma) \dots \{0\}} r_c(\Gamma) \leq r(\Gamma) \quad (r(\Gamma) \text{ désigne, comme ce sera toujours le cas, le rang linéaire de } \Gamma).$$

Et, en particulier, on a

$$r_0(\Gamma) \leq r(\Gamma),$$

et, pour tout $c \in M(\Gamma) \dots \{0\}$

$$r_c(\Gamma) \leq r(\Gamma).$$

Il est clair que, si $r(\Gamma)$ est fini, $r_0(\Gamma)$ et tous les $r_c(\Gamma)$ le sont aussi.

On sait qu'un groupe totalement ordonné non-nul de rang ordinal 1 possède un élément positif minimum, si et seulement si son rang linéaire est 1 ; si non, il est dense sur toute la droite réelle pour sa topologie naturelle (qui est aussi sa topologie d'ordre). Il en résulte que Γ possède un élément strictement positif minimum, si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites.

1° $M(\Gamma)$ possède un élément strictement positif minimum $c_{\min}$

2° $r_{c_{\min}}(\Gamma) = 1$.

Si le rang linéaire de Γ est fini, $M(\Gamma)$ l'est aussi, donc possède bien $c_{\min}$; dans ce cas, la seule condition 2° (précédente) suffit pour que Γ possède un élément strictement positif minimum. Comme $r_{c_{\min}}(\Gamma) \leq r(\Gamma)$, cela a sûrement lieu si Γ est de rang linéaire 1, c'est-à-dire $r(\Gamma) = 1$.

Remarquons encore que Γ est sans torsion, ce qui entraîne, dans le cas où il possède un ensemble générateur fini, que c'est un groupe abélien libre : En effet, Γ est dans ce cas, un module de type fini sur l'anneau principal $\mathbb{Z}$.

(F) Considérons maintenant le cas où $\Gamma = \mathcal{C}_E = \mathbb{Z}^S / \mathcal{P}_E$ (5.2.1). Nous voyons

que $M(\Gamma)$ est fini et

$$\sum_{c \in M(\Gamma) \dots \{0\}} r_c(\Gamma) \leq s - \nu_E.$$

En particulier, si E est une hypersurface indéfinie limite de préévaluation qui de plus est périodique, on a $s - \nu_E = 1$ et $\mathcal{C}_E$ possède un élément strictement positif minimum que l'on notera τ_0 . On va choisir et noter T_0 une translation fixe appartenant à τ_0 .

§ (5.3) - ETUDE DES ENSEMBLES DE POINTS DE R^S .

Pour plus de commodité on suppose, dans toute la suite, que Z^S est plongé dans R^S (R désigne l'ensemble des nombres réels) muni de sa structure habituelle d'espace euclidien ; on se sert toutefois de ses propriétés affines.

(5.3.1) Soit, dans R^S , l'hyperplan "non vertical" π d'équation

$$(1) \quad -\alpha_1 X_1 - \dots - \alpha_{s-1} X_{s-1} + X_s = h.$$

Rappelons que l'hyperplan π ne dépend que de $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}) \in R^{s-1}$ qui est appelé pente de π (noté $\alpha(\pi)$) et de h appelé hauteur de π (noté $h(\pi)$).

On considère souvent le point $\alpha^* = (\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}, 1) \in R^S$, associé à $\alpha \in R^{s-1}$, donc à π , et que l'on appelle direction de π .

On rappelle aussi que, si $P = (p_1, \dots, p_s)$ est un point de R^S , on dit que P est au-dessus, sur ou au-dessous de π si $-\alpha_1 p_1 - \alpha_2 p_2 - \dots - \alpha_{s-1} p_{s-1} + p_s$ est strictement supérieur, égal ou strictement inférieur à $h(\pi)$.

Pour tout $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}) \in R^{s-1}$, le nombre réel $h_\alpha(P) = -\alpha_1 p_1 - \alpha_2 p_2 - \dots - \alpha_{s-1} p_{s-1} + p_s$ est appelé la α -hauteur de P .

(5.3.2) Soit E un sous-ensemble non vide de R^S . Pour tout $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}) \in R^{s-1}$ on pose

$$(1) \quad h'_\alpha(E) = \inf_{P \in E} (h_\alpha(P))$$

$$(2) \quad h''_\alpha(E) = \sup_{P \in E} (h_\alpha(P))$$

$$(3) \quad Ep_\alpha(E) = h''_\alpha(E) - h'_\alpha(E).$$

On dit que $h'_\alpha(E)$ (resp. $h''_\alpha(E)$) est la α -hauteur inférieure (resp. supérieure) de E et que $Ep_\alpha(E)$ est la α -épaisseur de E .

Les hyperplans $\pi'_\alpha(E)$ d'équation

$$(4) \quad -\alpha_1 X_1 - \dots - \alpha_{s-1} X_{s-1} + X_s = h'_\alpha(E)$$

et $\pi''_\alpha(E)$ d'équation

$$(5) \quad -\alpha_1 X_1 - \dots - \alpha_{s-1} X_{s-1} + X_s = h''_\alpha(E)$$

sont dits α -hyperplans tangents inférieur et supérieur de E .

Il est clair que pour tout $\alpha \in R^{s-1}$, on a

$$(6) \quad -\infty \leq h'_\alpha(E) \leq h''_\alpha(E) \leq +\infty$$

avec $h'_\alpha(E) < +\infty$ et $-\infty < h''_\alpha(E)$; donc pour tout $\alpha \in R^{s-1}$ $Ep_\alpha(E)$ est défini et on a

$$(7) \quad 0 \leq Ep_\alpha(E) \leq +\infty.$$

Si E est fini, on voit que

$$(8) \quad \text{Ep}_\alpha(E) < +\infty.$$

En général, on a

(5.3.3) Proposition : Soit E une partie non vide de $\mathbb{R}^S$. L'ensemble des $\alpha \in \mathbb{R}^{S-1}$ tels que $\text{Ep}_\alpha(E) < +\infty$ est convexe.

En effet, soient $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1})$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{s-1})$ des éléments de $\mathbb{R}^{S-1}$ et soit λ un nombre réel tel que $0 \leq \lambda \leq 1$. Pour tout point $P = (p_1, \dots, p_s) \in \mathbb{R}^S$, on a

$$\begin{aligned} h_{\lambda\alpha + (1-\lambda)\beta}(P) &= -[\lambda\alpha_1 + (1-\lambda)\beta_1]p_1 - \dots - [\lambda\alpha_{s-1} + (1-\lambda)\beta_{s-1}]p_{s-1} + p_s \\ &= \lambda(-\alpha_1 p_1 - \dots - \alpha_{s-1} p_{s-1} + p_s) + (1-\lambda)(-\beta_1 p_1 - \dots - \beta_{s-1} p_{s-1} + p_s) \\ &= \lambda h_\alpha(P) + (1-\lambda) h_\beta(P); \text{ par conséquent } h'_{\lambda\alpha + (1-\lambda)\beta}(E) = \inf_{P \in E} [\lambda h_\alpha(P) + (1-\lambda) h_\beta(P)] \geq \end{aligned}$$

$$\geq \lambda \inf_{P \in E} h_\alpha(P) + (1-\lambda) \inf_{P \in E} h_\beta(P) = \lambda h'_\alpha(E) + (1-\lambda) h'_\beta(E). \text{ De la même façon,}$$

que précédemment, on aura $h''_{\lambda\alpha + (1-\lambda)\beta}(E) \leq \lambda h''_\alpha(E) + (1-\lambda) h''_\beta(E)$. Ce qui entraîne

$$\text{Ep}_{\lambda\alpha + (1-\lambda)\beta}(E) \leq \lambda \text{Ep}_\alpha(E) + (1-\lambda) \text{Ep}_\beta(E).$$

Donc $\text{Ep}_{\lambda\alpha + (1-\lambda)\beta}(E)$ sera fini si $\text{Ep}_\alpha(E)$ et $\text{Ep}_\beta(E)$ le sont. Ce qui achève la démonstration de la proposition.

(5.3.4) Proposition : Soit E une partie non vide de $\mathbb{R}^S$. On suppose que E est fini et n'est contenu dans aucun hyperplan vertical. Alors

$$(i) \quad \text{Ep}(E) = \inf_{\alpha \in \mathbb{R}^{S-1}} (\text{Ep}_\alpha(E)) \text{ existe.}$$

(ii) Si $\text{Ep}(E) > 0$, l'ensemble des $\alpha \in \mathbb{R}^{S-1}$ tels que $\text{Ep}_\alpha(E) = \text{Ep}(E)$ est borné.

Soit $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_s) \in \mathbb{R}^S$. Posons

$$(1) \quad |\beta| = \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \dots + \beta_s^2}$$

et, si $\alpha \in \mathbb{R}^{S-1}$

$$(2) \quad \|\alpha\| = |\alpha^*|$$

$$(3) \quad \beta_i(\alpha) = \frac{\alpha_i^*}{\|\alpha\|}, \quad i = 1, 2, \dots, s$$

$$(4) \quad \beta(\alpha) = (\beta_1(\alpha), \beta_2(\alpha), \dots, \beta_s(\alpha)).$$

Les égalités précédentes montrent que l'on a

$$(5) \quad |\beta(\alpha)| = 1.$$

Donc quand α parcourt R^{S-1} , le point $\beta(\alpha)$ parcourt la partie de la sphère unité $\sum_S$ de R^S formée de ses points $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_s)$ tels que $\beta_s \neq 0$.

Pour tout $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_s) \in \sum_S$ et pour tout $P = (p_1, \dots, p_s) \in R^S$ on pose

$$(6) \quad h_{\beta}^*(P) = \sum_{i=1}^{s-1} -\beta_i p_i + \beta_s p_s = -h_{-\beta}^*(P)$$

$$(7) \quad h_{\beta}^{*'}(E) = \inf_{P \in E} (h_{\beta}^*(P))$$

$$(8) \quad h_{\beta}^{*''}(E) = \sup_{P \in E} (h_{\beta}^*(P))$$

$$(9) \quad Ep_{\beta}^*(E) = h_{\beta}^{*''}(E) - h_{\beta}^{*'}(E) = Ep_{-\beta}^*(E).$$

Compte tenu de la définition de $Ep_{\alpha}(E)$ ((5.3.2), (3)), de $\beta(\alpha)$ (4) et des égalités précédentes, on vérifie facilement que l'on a

$$(10) \quad Ep_{\alpha}(E) = \|\alpha\| Ep_{\beta(\alpha)}^*(E).$$

$Ep_{\beta}^*(E)$ est une fonction réelle continue de la variable $\beta \in \sum_S$, considérée comme sous-espace de l'espace topologique R^S [car, pour tout $P \in E$, $h_{\beta}^*(P)$ l'est, et, comme E est fini, il en est de même pour $h_{\beta}^{*'}(E)$, $h_{\beta}^{*''}(E)$ donc pour $Ep_{\beta}^*(E)$];

mais $\sum_S$ étant compact dans R^S , la fonction continue $Ep_{\beta}^*(E)$ y atteint son minimum, soit $m_0 = Ep_{\beta_0}^*(E)$ avec $\beta_0 = (\beta_{0,1}, \dots, \beta_{0,s}) \in \sum_S$.

Si $m_0 = 0$, on a nécessairement $\beta_{0,s} \neq 0$ (car $m_0 = 0$ et $\beta_{0,s} = 0$ entraînent "E est contenu dans l'hyperplan vertical d'équation $-\beta_{0,1}x_1 - \dots - \beta_{0,s-1}x_{s-1} = h_0$ ", contrairement à l'hypothèse). Par conséquent on peut considérer le point

$$c_0 = \frac{1}{\beta_{0,s}} (\beta_{0,1}, \dots, \beta_{0,s-1})$$

de R^{S-1} . Comme $\beta_0 \in \sum_S$, on a

$$\|\alpha_0\| = \frac{1}{|\beta_{0,s}|} \quad \text{et} \quad \beta_0 = \pm \beta(\alpha_0).$$

Ce qui entraîne

$$(11) \quad \text{Ep}_{\alpha_0}(E) = \|\alpha_0\| \text{Ep}_{\beta(\alpha_0)}(E) = \frac{1}{|\beta_{\alpha_0, s}|} \cdot \text{Ep}_{\beta_0}^* = 0.$$

Donc 0 est la valeur minimale de $\text{Ep}_{\alpha}(E)$ quand α parcourt R^{S-1} .

Supposons maintenant que $m_0 > 0$. Et considérons l'ensemble L_c (où c désigne un nombre réel positif) des $\alpha \in R^{S-1}$ tels que $\|\alpha\| \leq c$. L_c est un compact (de R^{S-1}) sur lequel $\text{Ep}_{\alpha}(E)$ atteint son maximum $M(c)$. [La continuité de $\text{Ep}_{\beta}^*(E)$, vérifiée plus haut, entraîne celle de $\text{Ep}_{\alpha}(E)$; car, d'après l'égalité (10) précédente, on a $\text{Ep}_{\alpha}(E) = \|\alpha\| \text{Ep}_{\beta(\alpha)}^*(E)$, en outre $\beta(\alpha)$ et $\|\alpha\|$ sont des fonctions continues de $\alpha \in R^{S-1}$].

Mais alors pour tout $\alpha \in R^{S-1}$ tel que $\|\alpha\| > \frac{M(c)}{m_0}$, on aura

$$(12) \quad \text{Ep}_{\alpha}(E) = \|\alpha\| \text{Ep}_{\beta(\alpha)}^*(E) > \frac{M(c)}{m_0} m_0 = M(c).$$

Ainsi, $\text{Ep}_{\alpha}(E)$ prend sur le compact $L_{\max(c, \frac{M(c)}{m_0})}$ des valeurs

inférieures à toutes celles qu'elle prend sur son complémentaire. Donc $\text{Ep}_{\alpha}(E)$ atteint son minimum dans $L_{\max(c, \frac{M(c)}{m_0})}$. Ce qui achève la démonstration de la proposition.

Définition : On conserve les données et les notations de la proposition précédente. Le nombre réel positif

$$\text{Ep}(E) = \inf_{\alpha \in R^{S-1}} (\text{Ep}_{\alpha}(E))$$

est appelé épaisseur de E . L'ensemble $\mu(E)$ des $\alpha \in R^{S-1}$ tels que $\text{Ep}_{\alpha}(E) = \text{Ep}(E)$ est appelé l'ensemble de minceur de E .

Remarques : (1) La proposition précédente s'énonce sous la forme suivante : "Pour toute partie finie et non vide $E \subseteq R^S$, l'ensemble de minceur $\mu(E)$ de E est non vide et borné".

(2) L'ensemble de minceur d'une partie $E \subseteq R^S$ est convexe.

En effet, d'après la fin de la démonstration de la proposition (5.3.3), on a

$$(13) \quad \text{Ep}_{\lambda\alpha + (1-\lambda)\beta}(E) \leq \lambda \text{Ep}_{\alpha}(E) + (1-\lambda) \text{Ep}_{\beta}(E)$$

pour tout $\alpha, \beta \in R^{S-1}$ et $\lambda \in R$ tel que $0 \leq \lambda \leq 1$.

Donc, si l'on suppose $Ep_{\alpha}(E) = Ep_{\beta}(E) = Ep(E)$ l'inégalité (13) devient

$$(14) \quad Ep_{\lambda\alpha + (1-\lambda)\beta}(E) \leq Ep(E).$$

Mais $Ep(E)$ est le minimum, quand α parcourt R^{s-1} , des $Ep_{\alpha}(E)$. L'inégalité (14) entraîne, par conséquent, $Ep_{\lambda\alpha + (1-\lambda)\beta}(E) = Ep(E)$. La remarque est ainsi prouvée.

(5.3.5) Soit E une partie non-vidue de R^s et soit $\alpha \in R^{s-1}$. On considère les α -hyperplans tangents inférieur et supérieur $\pi'_{\alpha}(E)$ et $\pi''_{\alpha}(E)$ de E et on pose

$$(1) \quad E'_{\alpha} = E \cap \pi'_{\alpha}(E)$$

$$(2) \quad E''_{\alpha} = E \cap \pi''_{\alpha}(E).$$

On a

$$(3) \quad \text{Si } E \text{ est fini } E'_{\alpha} \text{ et } E''_{\alpha} \text{ ne sont pas vides.}$$

Car, si E est fini, le minimum $h'_{\alpha}(E)$ et le maximum $h''_{\alpha}(E)$ de $h_{\alpha}(P)$ ($P \in E$) sont atteints sur E . (par contre E'_{α} et E''_{α} peuvent être vides si E est infini).

On note

$$(4) \quad \bar{E}'_{\alpha} \text{ et } \bar{E}''_{\alpha}$$

les projections sur R^{s-1} de E'_{α} et E''_{α} .

On note aussi

$$(5) \quad \mathcal{P}'_{\alpha}(E) \text{ et } \mathcal{P}''_{\alpha}(E)$$

les enveloppes convexes de $\bar{E}'_{\alpha}$ et $\bar{E}''_{\alpha}$ [qui sont des polyèdres, au sens de N. Bourbaki (E.V.T. II, 7, exerc. 24), convexes, fermés de dimension au plus égale à $s-1$ si E est fini]. $\mathcal{P}'_{\alpha}(E)$ et $\mathcal{P}''_{\alpha}(E)$ sont appelés les α -polyèdres de sustension inférieur et supérieur de E . On montre

(5.3.6) Proposition : Soient E une partie non-vidue et finie de R^s , $\alpha \in \mu(E)$. Soient $\mathcal{P}'_{\alpha}(E)$ et $\mathcal{P}''_{\alpha}(E)$ les α -polyèdres de sustension inférieur et supérieur de E . On a $\mathcal{P}'_{\alpha}(E) \cap \mathcal{P}''_{\alpha}(E) \neq \emptyset$.

Si $\mathcal{P}'_{\alpha}(E) \cap \mathcal{P}''_{\alpha}(E) = \emptyset$, il existe une variété linéaire $\bar{L}$ de dimension $s-2$ de R^{s-1} qui sépare $\mathcal{P}'_{\alpha}(E)$ et $\mathcal{P}''_{\alpha}(E)$ et ne passe par la projection horizontale d'aucun point de E (car $\mathcal{P}'_{\alpha}(E)$ et $\mathcal{P}''_{\alpha}(E)$ sont des convexes fermés, en outre E est fini).

Donc si L désigne l'hyperplan vertical de R^s dont la projection horizontale est $\bar{L}$, il est clair que L sépare E'_{α} et E''_{α} , et qu'en outre ne passe par aucun point de E .

Soit D un plan orthogonal à $\bar{L}$ et soient

$$\delta = L \cap D, \delta' = \pi'_\alpha(E) \cap D, \delta'' = \pi''_\alpha(E) \cap D$$

les droites intersections avec D des hyperplans $L, \pi'_\alpha(E), \pi''_\alpha(E)$ de R^S qui ne sont pas parallèles à D .

Projetons sur D parallèlement à $\pi'_\alpha(E) \cap L$ (donc à $\pi''_\alpha(E) \cap L$) les ensembles E, E'_α, E''_α et soient F, F'_α, F''_α leurs projections respectives. Alors F est située dans la bande fermée $[\delta', \delta'']$ de D et on a $F'_\alpha = F \cap \delta', F''_\alpha = F \cap \delta''$. En outre la droite verticale δ sépare F'_α et F''_α .

Soient Q' et Q'' les points intersection de δ, δ' et δ, δ'' . Il est clair que la distance $d(Q', Q'')$ de Q' et Q'' est égale à $Ep_\alpha(E)$, en outre les points Q' et Q'' n'appartiennent pas à F .

Soient D^- et D^+ les deux demi-plans ouverts déterminés dans D par la droite δ . Alors l'un de ces demi-plans est disjoint de F'_α l'autre étant disjoint de F''_α .

Supposons, pour fixer les idées, que l'on ait

$$D^- \cap F'_\alpha = D^+ \cap F''_\alpha = \emptyset. \text{ On pose}$$

$$(\delta')^- = \delta' \cap D^-, (\delta')^+ = \delta' \cap D^+$$

$$(\delta'')^- = \delta'' \cap D^-, (\delta'')^+ = \delta'' \cap D^+.$$

$$\text{On a } (\delta')^- \cap F'_\alpha = \emptyset \text{ car } D^- \cap F'_\alpha = \emptyset \text{ et } (\delta')^- \subset D^-.$$

Comme aucun point de F n'est au-dessous de δ' , tout point de $F \cap D^-$ sera au-dessus de δ' . De la même façon, on voit que tout point de $F \cap D^+$ est au-dessous de δ'' .

Faisons subir à δ' et δ'' des rotations (dans le plan D) de centres Q' et Q'' respectivement et de même angle θ assez petit pour que, si δ'_θ et δ''_θ désignent les nouvelles positions de δ' et δ'' , $(\delta'_\theta)^-$ et $(\delta''_\theta)^-$ soient au-dessus de $(\delta')^-$ et $(\delta'')^-$ respectivement, et que par conséquent, $(\delta'_\theta)^+$ et $(\delta''_\theta)^+$ soient au-dessous de $(\delta')^+$ et $(\delta'')^+$ respectivement. Il en résulte, si θ est assez petit, que tous les points de F seront au-dessus de $(\delta'_\theta)^-$ et au-dessous de $(\delta''_\theta)^+$. Comme $(\delta'_\theta)^+$ est au-dessous de $(\delta')^+$ et comme $(\delta''_\theta)^-$ est au-dessus de $(\delta'')^-$, tous les points de F seront au-dessus de $(\delta'_\theta)^+$ et au-dessous de $(\delta''_\theta)^-$. Mais Q' et Q'' n'appartenant pas à F , il en résulte que F est contenu dans la bande ouverte $(\delta'_\theta, \delta''_\theta)$.

Soient π', π'' les hyperplans parallèles passant par δ'_θ et δ''_θ respectivement et parallèles à $L \cap \pi'_\alpha(E)$. On pose

$$\alpha' = \alpha(\pi') = \alpha(\pi'').$$

On a $h(\pi'') - h(\pi') = h_{\alpha'}(Q'') - h_{\alpha'}(Q') = \text{Ep}_{\alpha'}(E)$.

L'ensemble F étant au-dessus de δ_{θ}' et au-dessous de δ_{θ}'' , l'ensemble E est au-dessus de π' et au-dessous de π'' . Par conséquent $h_{\alpha'}(E) > h(\pi')$ et $h_{\alpha'}(E) < h(\pi'')$. Ce qui entraîne, compte tenu des égalités précédentes,

$$\text{Ep}_{\alpha'}(E) = h_{\alpha'}(E) - h_{\alpha'}(E) < h(\pi'') - h(\pi') = \text{Ep}_{\alpha'}(E)$$

contrairement à $\alpha \in \mu(E)$. La proposition est ainsi démontrée.

(5.3.7) Lemme. Soit E une partie finie de R^S . L'ensemble de minceur $\mu(E)$ de E est un polyèdre [au sens de N. Bourbaki (E.V.T. II, 7 exerc. 24)].

On sait (5.3.3) que $\mu(E)$ est convexe dans R^{S-1} . Rappelons qu'un point $\alpha \in \mu(E)$ est dit extrémal s'il n'existe aucune droite δ de R^{S-1} passant par α telle que α soit un point intérieur de $\delta \cap \mu(E)$.

Soit $\alpha \in \mu(E)$ et soient s' , s'' les dimensions respectives des variétés linéaires L' , L'' engendrées par E'_{α} et E''_{α} . Comme les hyperplans non-verticaux $\pi'_{\alpha}(E)$ et $\pi''_{\alpha}(E)$ sont tels que $\pi'_{\alpha}(E) \supseteq L'$ et $\pi''_{\alpha}(E) \supseteq L''$, les projections horizontales $\bar{L}'$, $\bar{L}''$ de L' , L'' , qui sont engendrées par $\bar{E}'_{\alpha}$ et $\bar{E}''_{\alpha}$ sont encore de dimensions respectives s' et s'' .

Si L'_0 , L''_0 sont les translatées homogènes de L' , L'' respectivement et si d est la dimension de $L'_0 \cap L''_0$ (d est aussi la dimension de l'intersection de tout couple $\hat{L}'$, $\hat{L}''$ de variétés translatées respectives de L' et L'' et telles que $\hat{L}' \cap \hat{L}'' \neq \emptyset$, en outre cette dimension se conserve par projection horizontale), la dimension de la variété U engendrée par $L' \cup L''$ est égale à $s' + s'' - d$.

Remarquons que la variété U qui est, par définition, égale à $L' + L''$ est parallèle à L' et à L'' ainsi qu'à tous les hyperplans de pente α .

Supposons $s' + s'' - d < s-1$. Considérons le système de tous les hyperplans π non-verticaux et tels que $\pi \supset U$. Soit η l'ensemble des pentes $\alpha(\pi)$ de ces hyperplans. η est une variété linéaire de dimension $s-1-(s'+s''-d) > 0$ dans R^{S-1} [En effet, U est l'intersection de $s-s'-s''+d$ hyperplans π_i dont les pentes $\alpha(\pi_i) = \alpha^{(i)}$ sont des vecteurs linéairement indépendants. Donc

$$\eta = \left\{ \sum_{i=1}^{s-s'-s''+d} \lambda_i \alpha^{(i)} ; \sum_{i=1}^{s-s'-s''+d} \lambda_i = 1, \lambda_i \in R \right\}$$

dépend bien de $(s-1) - s' - s'' + d$ paramètres].

Pour tout $\alpha' \in \eta$ soient π' et π'' les hyperplans de pente α' contenant respectivement les variétés L' et L'' (L' et L'' sont parallèles à U donc à tout hyperplan contenant U , ce qui assure l'existence de π' et π''). Comme $E \dots E'_{\alpha}$ est au-dessus de $\pi'_{\alpha}(E)$ et $E \dots E''_{\alpha}$ est au-dessous de $\pi''_{\alpha}(E)$, on aura aussi " $E \dots E'_{\alpha}$ est au-dessus de π' et $E \dots E''_{\alpha}$ est au-dessous de π'' " si α' est suffisamment voisin de α .

Mais $\pi' \supset E'_{\alpha}$ et $\pi'' \supset E''_{\alpha}$, on a par conséquent $\pi' = \pi'_{\alpha'}(E)$ et $\pi'' = \pi''_{\alpha'}(E)$.

D'après la proposition (5.3.5), on a $\mathcal{P}_{\alpha}(E) \cap \mathcal{P}_{\alpha'}(E) \neq \emptyset$, ce qui prouve que les projections horizontales $\bar{L}'$ et $\bar{L}''$ de L' et L'' se coupent (car L' et L'' sont engendrées par $\bar{E}'_{\alpha}$ et $\bar{E}''_{\alpha}$ dont les enveloppes convexes $\mathcal{P}_{\alpha}(E)$ et $\mathcal{P}_{\alpha'}(E)$ se coupent).

Il existe donc un point P' de L' tel que la verticale $v(P')$ passant par ce point coupe L'' en un point P'' . Il en résulte que la différence des hauteurs des couples d'hyperplans π'' et π' , contenant respectivement L'' et L' , est égale à la différence des s -ièmes coordonnées des points correspondants P'' et P' ; donc ne dépend pas du choix du couple π' , π'' .

On a, par conséquent,

$$Ep_{\alpha}(E) = h(\pi'') - h(\pi') = h(\pi''_{\alpha}(E)) - h(\pi'_{\alpha}(E)) = Ep_{\alpha}(E),$$

donc $\alpha' \in \mu(E)$, donc α' est un point intérieur de $\eta \cap \mu(E)$, en particulier, il en est un de $\Delta \cap \mu(E)$, où Δ est une droite quelconque $\subseteq \eta$ et passant par α . Ce qui prouve que α n'est pas extrémal dans $\mu(E)$. Translations L' et L'' en L'_0 , L''_0 de manière qu'un point P'_0 de E'_{α} et un point P''_0 de E''_{α} soient appliqués sur $\dot{O}$. Soient $E'_{\alpha,0}$, $E''_{\alpha,0}$ les images respectives de E'_{α} et E''_{α} par ces translations. Dès lors $L'_0 + L''_0$ dont la dimension est $s' + s'' - d$ est engendré par L'_0 et par $\sigma'' = s'' - d$ points $Q''_{0,1}$, $Q''_{0,2}$, $\dots$, $Q''_{0,\sigma''}$ de $E''_{\alpha,0}$ linéairement indépendants

(mod L'_0), c'est-à-dire tels que $\sum_{i=1}^{\sigma''} \lambda_i Q''_{0,i} \in L'_0 \Rightarrow (\forall i = 1, \dots, \sigma'') [\lambda_i = 0]$.

En outre L'_0 est engendré par s' points linéairement indépendants. Par suite E'_{α} contient au moins $s' + 1$ points qui engendrent une variété $L^{*''} \subset L''$ telle que tout hyperplan parallèle à L' et $L^{*''}$ l'est aussi à $L'_0 + L''_0$. En particulier, si $s' + \sigma'' = s - 1$, la variété $L'_0 + L''_0$ est l'hyperplan homogène de pente α et il n'y a qu'un seul hyperplan parallèle à L' et à $L^{*''}$ passant par un point arbitraire de R^S . Or tel est le cas si α est extrémal dans $\mu(E)$. Donc, dans ce cas, $\pi'_{\alpha}(E)$ est l'unique hyperplan parallèle à L'' contenant L' et $\pi''_{\alpha}(E)$ est l'unique hyperplan parallèle à L' contenant L'' .

Il résulte de ce qui précède que tout point extrémal α de $\mu(E)$ peut s'obtenir de la manière suivante :

On choisit convenablement deux sous-ensembles disjoints E' et E'' de E tels que

1° si $s' + 1$ est le nombre d'éléments de E' et si $s'' + 1$ est celui des éléments de E'' on ait $s = s' + s'' + 1$,

2° les variétés linéaires engendrées par E' et E'' sont de dimensions respectives s' et s'' ,

3° l'intersection des variétés homogènes correspondantes L'_0, L''_0 est réduite à $\{0\}$.

E' et E'' étant choisis comme précédemment, il existe un seul hyperplan π' contenant L' et parallèle à L'' et un seul hyperplan π'' contenant L'' et parallèle à L' , en outre les hyperplans π' et π'' sont parallèles. Si α est un point extrémal de $\mu(E)$, il existe un tel choix (ou peut être plusieurs) d'ensemble E' et E'' tels que $\alpha = \alpha(\pi') = \alpha(\pi'')$ et que $\pi' = \pi'_\alpha(E)$, $\pi'' = \pi''_\alpha(E)$.

Comme le nombre de couples E', E'' de sous-ensembles de E tels $E' \cap E'' = \emptyset$ et $E' \cup E''$ possède $s + 1$ éléments est fini, le nombre de points extrémaux de $\mu(E)$ est aussi fini.

Soit $\bar{M}$ le polyèdre fermé qui est l'enveloppe convexe de cet ensemble fini de points extrémaux. Supposons que $\mu(E) \neq \bar{M}$ et soit $\alpha \in \mu(E) - \bar{M}$. Il existe un hyperplan H séparant α et $\bar{M}$. Soit H' l'hyperplan parallèle à H qui est tangent à $\mu(E) - \bar{M}$ du côté où se trouve α . Alors $H' \cap \mu(E)$ est un sous-ensemble convexe de H' et tout point extrémal par rapport à H' en est un par rapport à $\mu(E)$. Mais tout ensemble convexe (à intérieur non vide) possède des points extrémaux. Il existe donc des points extrémaux de $\mu(E)$ qui ne sont pas dans $\bar{M}$, ce qui est absurde et qui achève la démonstration du lemme.

(5.3.8) Lemme. Soit $\mathcal{P} : 0 \leq x_i \leq a_i$ ($i = 1, 2, \dots, s$) un parallélotope de R^s , soit $P_i = (0, \dots, a_i, \dots, 0)$ le point de l'axe X_i dont la composante sur cet axe est égal à a_i , soit E un ensemble fini de points de $\mathcal{P}$ tels que $0 = (0, \dots, 0) \notin E$ et P_s est l'unique point de E appartenant à l'hyperplan "horizontal" H passant par P_s . Alors l'ensemble de minceur $\mu(E)$ de E est contenu dans R_-^{*s-1} .

Par hypothèse, tous les $P \in E$ tels que $P \neq P_s$ sont au-dessous de H . Donc, si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}) \in R^{s-1}$ est tel que tous les α_i sont strictement

négatifs et de valeurs absolues suffisamment petites, tous les points $P \in E$ tels que $P \neq P_s$ resteront encore au-dessous de l'hyperplan H'' de pente α passant par P_s . D'autre part, comme $\dot{O} = (0, \dots, 0) \notin E$ et E est fini, il existe un voisinage de $\dot{O} = (0, \dots, 0)$, qui est disjoint de E . Par suite, si $\varepsilon > 0$ est suffisamment petit, tout point $P \in E$ est au-dessus de l'hyperplan H' de pente α passant par le point $(0, \dots, \varepsilon)$ de l'axe X_s .

Ainsi $\pi''_\alpha(E) = H''$ et $\pi'_\alpha(E)$ est au-dessus de H' , ce qui entraîne $Ep_\alpha(E) \leq a_s - \varepsilon < a_s$.

Par contre, supposons que $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}) \in R^{s-1}$ soit tel que certaines de ses coordonnées soient positives. Alors, puisque $h_\alpha(P_i) = -\alpha_i a_i$ ($P_i = (0, \dots, a_i, \dots, 0)$, $i = 1, 2, \dots, s$), certaines des $h_\alpha(P_i)$ seront négatives. Donc, d'une part $\pi'_\alpha(E)$ coupera l'axe X_s en un point dont la s -ième composante (la seule pouvant être non nulle) est négative, et d'autre part $\pi''_\alpha(E)$ coupe, évidemment, le même axe X_s en un point dont la s -ième composante (la seule non-nulle) est au moins égale à a_s . Ce qui entraîne $Ep_\alpha(E) \geq a_s$ donc $\alpha \notin \mu(E)$. Ce qui achève la démonstration de la proposition.

(5.3.9) Proposition. Soit E une partie finie de Z^s , qui n'est contenue dans aucun hyperplan vertical. Alors il existe $\alpha \in Q^{s-1}$ tel que $Ep_\alpha(E) = Ep(E)$.

Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1})$ un sommet du polyèdre $\mu(E)$ (5.3.7) et soient L', L'' les variétés engendrées par E'_α et E''_α . Soient L'_0, L''_0 les translations homogènes de L' et L'' respectivement et soient T', T'' les translations qui amènent un point de E'_α (resp. E''_α) sur $\dot{O} = (0, \dots, 0)$. Il est clair que $E'_{\alpha,0} = T' \cdot E'_\alpha$ et $E''_{\alpha,0} = T'' \cdot E''_\alpha$ sont les ensembles générateurs de L'_0, L''_0 respectivement, en outre $\dot{O} = (0, \dots, 0) \in E'_{\alpha,0} \cap E''_{\alpha,0}$.

Les translations T', T'' sont entières, donc $E'_{\alpha,0}, E''_{\alpha,0}$ sont des parties de Z^s . On a vu (dans la démonstration du lemme 1) que $L'_0 + L''_0$ est l'hyperplan homogène $\pi_{\alpha,0}(E)$ de pente α parallèle aux hyperplans $\pi'_\alpha(E), \pi''_\alpha(E)$ et qu'il est engendré, en tant que variété homogène, par $n-1$ points linéairement indépendants de $E_0 = E'_{\alpha,0} \cup E''_{\alpha,0}$.

Il en résulte que $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}) \in Q^{s-1}$ car $(\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}, 1)$ est orthogonal à $s-1$ vecteurs rationnels linéairement indépendants.

(5.3.10) Soit H un hyperplan non vertical de R^s passant par un point $P \in Z^s$ (dans la suite on peut supposer, sans perte de généralité, que $P = \dot{O} = (0, \dots, 0)$)

Si l'on translate cet hyperplan H de manière que P soit transporté en $\dot{O}$, le translaté de l'ensemble des points entiers $Q \in H$ est le réseau⁽¹⁾ des points entiers du translaté homogène H_0 de H qui, visiblement, ne dépend que de la pente $\alpha(H) = (\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1})$ de H et ne dépend d'aucune autre circonstance (en particulier du choix du point $P \in H$). D'ailleurs, l'ensemble des vecteurs $Q - P$, où (P, Q) parcourt les points entiers de $H \times H$, est encore le même réseau. Soit r le rang de ce réseau.

Théorème. L'entier $s - r$ est égal à la dimension du Q -espace vectoriel $W = Q + Q\alpha_1 + \dots + Q\alpha_{s-1}$.

Il s'agit de calculer le rang de l'ensemble des points entiers de l'hyperplan homogène H_0 de pente $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1})$. Considérons d'abord l'ensemble des points rationnels de H_0 . Cet ensemble est visiblement un espace vectoriel sur Q .

Soit $1 = w_1, \dots, w_u$ une base du Q -espace vectoriel W . Alors, on a

$$\alpha_j = \sum_{i=1}^u q_{i,j} w_i \quad (j = 1, \dots, s-1)$$

où les $q_{i,j}$ sont des rationnels formant une matrice de rang u . Donc, si $x = (x_1, \dots, x_s) \in Q^s$, il appartient à H_0 si et seulement si

$$0 = x_s - \sum_{j=1}^{s-1} \alpha_j x_j = (x_s - \sum_{j=1}^{s-1} q_{1,j} x_j) - \sum_{i=2}^u \left(\sum_{j=1}^{s-1} q_{i,j} x_j \right) w_i. \text{ Cela a lieu si et}$$

seulement si

$$\sum_{j=1}^{s-1} q_{i,j} x_j = 0 \quad (i = 2, \dots, u)$$

et

$$- \sum_{j=1}^{s-1} q_{1,j} x_j + x_s = 0.$$

(1) On appellera réseau, de rang r , d'une variété linéaire réelle V de dimension $m \geq r$, tout groupe additif engendré par r vecteurs linéairement indépendants $u_1, u_2, \dots, u_r \in V$. Si $r = m$ et $V = R^m$, on retrouve la définition habituelle de réseau (J.W.S. Cassels, an introduction to the geometry of numbers, Springer-Verlag 1959, p. 9 ; ou P. Samuel, théorie algébrique des nombres, Hermann, p. 66).

Comme le rang de la matrice de ce système d'équations est u (car celui de la matrice partielle $\|q_{i,j}\|$ l'est déjà) ces relations sont linéairement indépendantes et définissent une sous-variété de dimension $s - u$ de l'hyperplan H_0 . Et les vecteurs rationnels $(x_1, \dots, x_s)$ qui y satisfont sont des combinaisons linéaires de $s - u$ vecteurs $v_1, \dots, v_{s-u}$ linéairement indépendants sur Q .

Montrons que les vecteurs entiers de la variété définie plus haut sont combinaisons linéaires sur Z de $s - u$ vecteurs indépendants $v_1^0, v_2^0, \dots, v_{s-u}^0$.

En effet soit V_i^0 l'ensemble des combinaisons linéaires $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{s-u} v_{s-u}$ ($i = 1, \dots, s-u$; $\lambda_i \in Q$) qui sont des vecteurs entiers. Alors les coefficients λ_i de v_i dans les vecteurs $v \in V_i^0$ forment un Z -idéal fractionnaire (qui est toujours principal) soit (1_i) . Choisissons pour tout $i = 1, \dots, s-u$ un vecteur $v_i^0 = \lambda_i^0 v_i + \dots + \lambda_{s-u}^0 v_{s-u} \in V_i^0$ tel que $\lambda_i^0 = 1_i$. Alors $v_1^0, v_2^0, \dots, v_{s-u}^0$ forment une base sur Z des vecteurs entiers de H_0 .

En effet, supposons qu'il existe des $v \notin Zv_1^0 + Zv_2^0 + \dots + Zv_{s-u}^0$ qui sont des vecteurs entiers de H_0 . Pour un tel v il existe un i_v tel que $v \in V_{i_v}^0 \dots V_{i_v+1}^0$ (où l'on pose $V_{s-u+1}^0 = \emptyset$) et on peut choisir un $v \notin Zv_1^0 + Zv_2^0 + \dots + Zv_{s-u}^0$ tel que i_v soit le plus grand possible. Mais si $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{s-u} v_{s-u}$, on a $\lambda_i \in (1_i)$, donc $\lambda_i = n_i 1_i$ où $n_i \in Z$ et $v - n_i v_i^0 \in V_{i+1}^0$, ce qui contredit le choix de v et achève la démonstration du théorème.

Les $v_1^0, \dots, v_{s-u}^0$ définis dans la démonstration précédente sont dits les périodes fondamentales de H et le polytope $[v_1^0, v_2^0, \dots, v_{s-u}^0]$ (considéré à translation près) est dit le polytope (ou domaine) fondamental de H .

Remarque. Si la pente $\alpha(H)$ de H est rationnelle, il existe $s-1$ périodes fondamentales ; c'est en particulier le cas si $\alpha(H)$ est un des sommets de l'ensemble de minceur $\mu(E)$ d'un ensemble fini non vertical E de points entiers dans R^S [proposition (5.3.9)].

§ (5.4) - SOUS-ENSEMBLES REGULIERS DANS N^S .

(5.4.1) Soit E un sous-ensemble de N^S de type ML de points de base $P_i = (0, \dots, n_i, \dots, 0)$, $i = 1, 2, \dots, s$; les entiers n_i , dits les invariants de base de E , sont tels que $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_s \geq 2$ (4.1). On montre que

Lemme. Si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}) \in \mu(E)$, on a
 $\alpha \in U = \{\xi_1, \dots, \xi_{s-1}\} \in R^{s-1}$; $-1 \leq \xi_1, \dots, \xi_{s-1} < 0\}$

On sait déjà que $\mu(E) \subseteq R_-^{*s-1}$ [(5.3.8)]. Il faut donc montrer que pour tout $i = 1, 2, \dots, s-1$ on a $\alpha_i \geq -1$. Supposons qu'il existe $i \in \{1, 2, \dots, s-1\}$ tel que $\alpha_i < -1$. Soient H' et H'' les α -hyperplans tangents inférieur et supérieur de E . Soient L_i le produit cartésien des axes autres que X_i et X_s et $Z = (z_1, \dots, z_{i-1}, 0, z_{i+1}, \dots, z_{s-1}, 0)$ un point de L_i . Si $\mathcal{P}_{i,Z}$ désigne le plan vertical passant par Z , on pose

$$D' = H' \cap \mathcal{P}_{i,Z} \quad \text{et} \quad D'' = H'' \cap \mathcal{P}_{i,Z}$$

Comme $\mathcal{P}_{i,Z}$ est un plan vertical, et H' et H'' ne le sont pas, D' et D'' sont des droites parallèles de pente α_i dans le plan $\mathcal{P}_{i,Z}$. Soient

$$E_Z = E \cap \mathcal{P}_{i,Z} \quad \text{et} \quad P \in E_Z, \quad \text{et soit } D^{*'} \text{ la parallèle à } D'$$

passant par P . Alors si $P + e_i - e_s \in N^S$, il appartient à $\overline{\text{int.}E}$ (lemme (4.1.12)).

Comme $P + e_i - e_s$ appartient à la droite de pente -1 passant par P , il est au-dessus de la droite D' de pente $\alpha_i < -1$ passant par P . Il en résulte que si $P' \in E_Z$ est tel que sa i -ème coordonnée soit supérieure à celle de P , le point P' est au-dessus de $D^{*'}$. En particulier, si l'on prend $P \in E_Z$ dont l'abscisse est 0, on voit que tout $P' \in E_Z$ d'abscisse positive est au-dessus de $D^{*'}$, donc, à fortiori, au-dessus de D' .

Par suite, tout $P' \in E \cap D'$, donc, aussi, tout $P' \in E \cap H'$ est tel que sa i -ème coordonnée soit égale à 0. Par un raisonnement analogue au précédent, on voit que la i -ème coordonnée de tout $P \in E \cap D''$ est n_i . Par suite, la projection horizontale $\bar{E}'_\alpha$ de $E'_\alpha = E \cap H'$ ainsi que son enveloppe convexe

sont contenues dans l'hyperplan $X_i = 0$ de R^{S-1} , tandis que celle $\bar{E}''_\alpha$ de $E''_\alpha = E \cap H''$ et son enveloppe convexe sont contenues dans l'hyperplan $X_i = n_i$. Comme les hyperplans $X_i = 0$ et $X_i = n_i$ sont parallèles et $n_i > 0$, on a $\mathcal{P}'_\alpha(E) \cap \mathcal{P}''_\alpha(E) = \emptyset$, ce qui, d'après la proposition (5.3.6) est une contradiction. Donc $\alpha \notin \mu(E)$ et le lemme est démontré.

Définition. Un sous-ensemble $E \subseteq N^S$ de type ML est dit régulier s'il existe des hyperplans π tels que $\alpha(\pi) \in U$ (lemme précédent) et que $\text{int}.E$ soit l'ensemble de tous les points entiers de R^S_+ qui se trouvent au-dessous de π . De tels hyperplans sont dits hyperplans de régularité de E .

(5.4.2) Proposition. Soit E un sous-ensemble de N^S de type ML et soit π un hyperplan tel que

$$\alpha = \alpha(\pi) \in U = \{(\xi_1, \dots, \xi_{S-1}) \in R^{S-1} ; -1 < \xi_1, \dots, \xi_{S-1} < 0\}.$$

Alors si π' est un hyperplan parallèle à π tel que $h(\pi') = h(\pi) + 1$, une condition nécessaire et suffisante pour que π soit un hyperplan de régularité de E est que E soit contenu dans la couche semi-ouverte $[\pi, \pi'[,$

En effet, si $\bar{P}$ est un point entier de l'hyperplan H d'équation $X_S = 0$ et si $\bar{P}$ est au-dessous de π , il existe dans la bande $[\pi, \pi'[,$ un et un seul point entier P dont la projection horizontale est $\bar{P}$. Et on a $P \in E$ si, et seulement si, tout point entier P' de projection horizontale $\bar{P}$ qui est au-dessous de $P^{(1)}$ appartient à $\text{int}.E$.

D'autre part, s'il existe un point entier de l'hyperplan $X_S = 0$, qui n'est pas au-dessous de π et appartient à $\text{int}.E$, il existe aussi un point de E qui n'est pas au-dessous de π' . Donc n'appartient pas à $[\pi, \pi'[,$

Ainsi, si $E \subseteq [\pi, \pi'[,$ le sous-ensemble $\text{int}.E$ est l'ensemble des points entiers de R^S_+ qui sont au-dessous de π et si $\text{int}.E$ est cet ensemble

(1) autrement dit $P' = P - a e_S$, où a est un entier strictement positif.

de points entiers, tout point $P = (p_1, \dots, p_s) \in E$ tel que $p_s > 0$ est dans $[\pi, \pi'[,$ Mais dans ce cas il en est de même pour les points de E se trouvant sur l'hyperplan H :

En effet, si P est un tel point, il existe un entier $i \in \{1, 2, \dots, s-1\}$ tel que $P - e_i \in \text{int}.E$. Comme l'épaisseur, suivant la direction $X_i^{(1)}$, de $[H \cap \pi, H \cap \pi'[$ est $\frac{1}{-\alpha_i} \geq 1$, on voit que $P \in [\pi, \pi'[,$

Il en résulte que si $\alpha \in U$, il existe des hyperplans de régularité de E de pente α si et seulement si $\text{Ep}_\alpha(E) < 1$. Mais alors, on a $\text{Ep}(E) < 1$. Par suite, E est régulier si et seulement si $\text{Ep}(E) < 1$, et, dans ce cas, pour tout $\alpha \in \mu(E)$ il existe des hyperplans de régularité π de E tels que $\alpha(\pi) = \alpha$.

Si $E \subseteq N^S$ n'est pas régulier, et si π est un hyperplan tel que $\alpha(\pi) = \alpha \in U$ et que les points de E soient au-dessus ou sur π , l'ensemble $\pi \cap E$ n'étant pas vide, tout point de $\text{int}.E$ qui n'est pas au-dessous de π sera dit α -irrégulier.

(5.4.3) Lemme 1. Soit π un hyperplan tel que $\alpha = \alpha(\pi) \in U$ et $h(\pi) > 1$. Soit I l'ensemble des points de N^S qui sont au-dessous de π . Alors l'ensemble E des points $P \in N^S \setminus I$ qui sont points limites de la partition $(I, N^S \setminus I)$ de N^S [c'est-à-dire tels qu'au moins l'un des points $P - e_i$ ($i = 1, 2, \dots, s$) appartient à I] est, si l'on range convenablement les coordonnées, un sous-ensemble de N^S de type ML et de préévaluation, tel que $I = \text{int}.E$. Cet ensemble est par conséquent régulier et π en est un hyperplan de régularité.

Soit π' l'hyperplan parallèle à π tel que $h(\pi') = h(\pi) + 1$ et soit E^* l'ensemble de tous les points de N^S situés dans la couche $[\pi, \pi'[,$ Alors $E \subseteq E^*$.

(1) c'est-à-dire en permutant les axes $X_1, \dots, X_s$ de manière que X_i devienne le dernier axe, c est aussi la longueur du segment que la bande intercepte sur toute droite parallèle à X_i .

Compte tenu de (4.1.3), (4.1.10) et (4.1.15), il suffit, pour montrer que E est de type ML et de préévaluation, de prouver que les translatées entières de E ne se traversent pas. Comme $E \subseteq E^*$, il suffit donc de prouver que les translatées entières de E^* ne se traversent pas. Or, soit T une translation entière de R^S . On peut avoir trois cas : ou bien $T + \pi'$ est au-dessous de π' , ou bien il coïncide avec π' , ou bien, enfin, $T + \pi$ est au-dessus de π . Si le point $P \in E^*$ est tel que $T + P$ a la même projection horizontale qu'un point P' de E^* , dans les deux premiers cas précédents, on a $t_s + p_s \leq p'_s$; et dans le troisième cas on a $t_s + p_s > p'_s$ (t_s, p_s, p'_s désignent respectivement les s -ièmes composantes de T, P et P'). Comme cela a lieu indépendamment du choix de $P \in E^*$, on voit que $T + E^*$ et E^* ne se traversent pas, ce qui, compte tenu de (5.4.2), achève la démonstration du lemme.

(5.4.4) Lemme. Tout sous-ensemble $E \subseteq N^2$ de type LL et de préévaluation est régulier.

Soit $\alpha \in \mu(E)$ [d'après le lemme (5.1.4), α est un nombre réel tel que $-1 \leq \alpha < 0$].

Soient L' et L'' les α -tangentes inférieure et supérieure de E . Si $L' = L''$, il n'y a rien à prouver ; car, dans ce cas, $Ep_\alpha(E) = 0 < 1$ et, d'après la proposition (5.4.2), E est régulier. On peut donc supposer que $L' \neq L''$. On pose $E' = L' \cap E$ et $E'' = L'' \cap E$. Si H est la droite horizontale d'équation $X_2 = 0$ (axe des premières coordonnées), soient $\bar{E}, \bar{E}'$ et $\bar{E}''$ les projections respectives sur H de E, E' et E'' , enfin soient S, S' et S'' les plus petits segments de H contenant $\bar{E}, \bar{E}'$ et $\bar{E}''$ respectivement. On remarque que $\bar{E}$ est l'ensemble de tous les entiers de S . En outre, la proposition (5.3.6) montre que l'on a $S' \cap S'' \neq \emptyset$. Mais il n'est pas possible que $S' \cap S''$ se réduise à un seul point (ce qui entraîne que chacun des ensembles E' et E'' contient au moins deux points), car ce seul point serait à la fois projection horizontale d'un

point de E' et d'un point de E'' , donc E contiendrait deux points distincts ayant même projection horizontale, ce qui est impossible, car E est un sous-ensemble de type ML.

Donc, si $S' = [\bar{P}_1', \bar{P}_2']$ et $S'' = [\bar{P}_1'', \bar{P}_2'']$ [où l'entier $\bar{P}_1^{(j)}$ est strictement inférieur à l'entier $\bar{P}_2^{(j)}$ ($j = 1, 2$)], ou bien il existe un point $P' \in E'$ dont la projection horizontale $\bar{P}'$ est un point intérieur de S'' ou bien il existe un point P'' de E'' dont la projection horizontale $\bar{P}''$ est un point intérieur de S' . On peut supposer, sans perte de généralité, que l'on a l'un des deux cas précédents, par exemple le premier (la démonstration qui va suivre se transpose, de façon évidente, au second cas).

On suppose donc qu'un point $\bar{P}' \in \bar{E}'$ se trouve entre les points $\bar{P}_1''$ et $\bar{P}_2''$ de $\bar{E}''$, qui sont les projections horizontales respectives des points P_1'' et P_2'' de E'' . Soient $\bar{Q}_1''$ et $\bar{Q}_2''$ ($\bar{Q}_1'' < \bar{Q}_2''$) les points consécutifs de $\bar{E}''$ entre lesquels se trouve le point $\bar{P}'$ et soit $Q_1^{**} = Q_1'' - e_2$ (Q_1'' désigne le point de E'' de projection horizontale $\bar{Q}_1''$). Supposons que $Ep(E) \geq 1$. Donc puisque $h_\alpha(Q_1'') = h(L'') \geq h(L') + 1$, on aura $h_\alpha(Q_1^{**}) \geq h(L')$, et le point Q_1^{**} sera au-dessus ou sur L' .

Soit T la translation qui amène P' en Q_1^{**} (P' est le point de E' de projection horizontale $\bar{P}'$). Alors $T + L'$ est la parallèle à L' passant par Q_1^{**} , donc $T + L'$ est au-dessus de L' ou coïncide avec lui, car $h_\alpha(Q_1^{**}) \geq h(L')$. Il est clair que la projection horizontale de $T = Q_1^{**} - P'$ est strictement négative, donc la projection horizontale $\overline{T + Q_2''}$ de $T + Q_2''$ est un point intérieur de $[\bar{Q}_1'', \bar{Q}_2''] \subset S'' \subseteq S$ (car la projection horizontale de Q_1^{**} est la même que celle de Q_1'' , en outre, on a $T + P' = Q_1^{**}$).

Par conséquent $\overline{T + Q_2''}$ n'appartient pas à $\bar{E}''$, mais appartient à $\bar{E}$ (car $\bar{E}$ est l'ensemble des entiers de S). Il existe donc un point P^* de E de projection horizontale $\overline{T + Q_2''}$, en outre P^* est au-dessous de L'' . Par contre,

puisque L'' et L' sont parallèles, le point $T + Q_2'' \in T + L''$ est au-dessus de L'' ou il coïncide avec L'' (car on a vu plus haut que $T + L'$ est au-dessus de L' ou coïncide avec L'). On a, par conséquent, $P^* <_p T + Q_2''$, mais on a aussi $Q_1''^* = T + P' <_p Q_1''$. Ainsi $T + E$ et E se traversent, car les points P^*, Q_2'' , Q_1'' et P' appartiennent à E alors que les points $Q_1''^*$ et $T + Q_2''$ de N^2 n'appartiennent pas à E , ce qui prouve que l'on a $Ep(E) < 1$. Le lemme résulte alors de la proposition (5.4.2).

(5.4.5) Corollaire. Pour tout sous-ensemble E de N^2 de type ML et de pré-valuation, on a $Ep(E) < 1$.

Cela résulte de la démonstration du lemme (5.4.4), ou du lemme (5.4.4) et de la proposition (5.4.2).

§ (5.5) - COMPLEMENTS SUR LES SOUS-ENSEMBLES DE R^S .

(5.5.1) Soit $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \dots, E_l\}$ une famille finie d'ensembles finis de R^S .

Pour tout $\alpha \in R^{S-1}$ on pose

$$(1) \quad Ep_\alpha(\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \dots, E_l\}) = \max_{1 \leq i \leq l} (Ep_\alpha(E_i)).$$

$$(2) \quad Ep(\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \dots, E_l\}) = \inf_{\alpha \in R^{S-1}} (Ep_\alpha(\mathcal{E})).$$

On dit que $Ep_\alpha(\mathcal{E})$ (resp. $Ep(\mathcal{E})$) est la α -épaisseur (resp. l'épaisseur) collective de la famille $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \dots, E_l\}$.

(5.5.2) Lemme. Soit $\mathcal{E} = \{E_1, E_2, \dots, E_l\}$ une famille finie de sous-ensembles de N^2 de type ML dont les translatées entières ne se traversent pas mutuellement ; on a $Ep(\mathcal{E}) < 2$.

Soit, par exemple, E_1 l'un des E_i ($i = 1, 2, \dots, l$) dont le segment (enveloppe convexe de sa projection horizontale) est de longueur maximale et soit $\alpha \in \mu(E_1)$. Alors, on sait (5.4.5) que $Ep_\alpha(E_1) < 1$. Supposons que $Ep(E_1, E_2, \dots, E_l) \geq 2$, on aura $Ep_\alpha(E_1, E_2, \dots, E_l) \geq 2$. Il existe donc un E_i ($i = 2, 3, \dots, l$) tel que $Ep_\alpha(E_i) \geq 2$. C'est-à-dire qu'il existe deux points

$P_i', P_i'' \in E_i$ tels que $h_\alpha(P_i'') - h_\alpha(P_i') \geq 2$. Comme, par hypothèse, la longueur du plus petit segment contenant la projection horizontale de E_1 est plus grande que celle du segment analogue pour E_i , il existe deux points $P_1', P_1'' \in E_1$ dont la différence des abscisses est la même que celle de P_i' et P_i'' respectivement.

Soit $P_1'^* = P_1' - e_2$ et soit T la translation qui applique P_i' sur $P_1'^*$. Alors

$$h_\alpha(T + P_i') = h_\alpha(P_1'^*) = h_\alpha(P_1') - 1, \text{ ce qui entraîne}$$

$$h_\alpha(T + P_i'') = h_\alpha(T + P_i') + [h_\alpha(P_i'') - h_\alpha(P_i')] =$$

$$= h_\alpha(P_1') - 1 + [h_\alpha(P_i'') - h_\alpha(P_i')] \geq h_\alpha(P_1') - 1 + 2 = h_\alpha(P_1') + 1 > h_\alpha(P_1'').$$

Ainsi $T + P_i'$ est au-dessous de $P_1' \in E_1$ tandis que $T + P_i''$ est au-dessus de $P_1'' \in E_1$. Donc, $T + E_i$ et E_1 se traversent contrairement à l'hypothèse, ce qui achève la démonstration du lemme.

(5.5.3) Lemme. Soit E un sous-ensemble de N^s ($s \geq 2$) de type ML et de pré-valuation. Alors on a $Ep(E) < 4s - 7$.

En effet, le lemme est vrai pour $s = 2$ (5.4.5). Soit $s > 2$. On suppose que le lemme est vrai pour $s - 1$ et on se propose de montrer qu'il est aussi vrai pour s , ce qui achèvera la démonstration.

L'intersection $\tilde{E}$ de E avec l'hyperplan H d'équation $X_s = 0$ est un sous-ensemble de N^{s-1} de type ML et de prévaluation ((5.1.1) remarque 2). On a par hypothèse $Ep(\tilde{E}) < 4(s-1) - 7$. Il existe donc un $\tilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-2}) \in R^{s-2}$ tel que $Ep_{\tilde{\alpha}}(\tilde{E}) < 4(s-1) - 7$. Ce qui montre que pour tout couple $(\tilde{P}, \tilde{Q}) \in \tilde{E} \times \tilde{E}$ on a $|h_{\tilde{\alpha}}(\tilde{P}) - h_{\tilde{\alpha}}(\tilde{Q})| < 4(s-1) - 7$. Fixons un point $\tilde{P} \in \tilde{E}$. L'ensemble des points $P \in E$ dont la projection sur H est $\tilde{P}$ est l'intersection de E avec le plan $H_{\tilde{P}}$ parallèle aux axes X_{s-1}, X_s et passant par $\tilde{P}$. C'est un ensemble $E_{\tilde{P}}$ de type ML et de prévaluation dans $H_{\tilde{P}}$. Si l'on projette, sur le produit cartésien $\hat{H}$ des axes X_{s-1} et X_s tous les ensembles $E_{\tilde{P}}$ ($\tilde{P} \in \tilde{E}$), on obtient une

famille finie d'ensembles $\hat{E}_{\tilde{P}}$ de $\hat{H}$ qui sont de type ML et dont les translatées entières ne se traversent pas mutuellement. On a donc, d'après (5.5.2), $Ep(\{\hat{E}_{\tilde{P}}; \tilde{P} \in \tilde{E}\}) < 2$ et il existe un $\hat{\alpha} = (\alpha_{s-1})$ tel que tous les $Ep_{\hat{\alpha}}(\hat{E}_{\tilde{P}}) = Ep_{\hat{\alpha}}(E_{\tilde{P}})$ soient < 2 . Il en résulte que si $\tilde{P}, \tilde{Q}$ sont deux points d'un même $\hat{E}_{\tilde{P}}$, ($\tilde{P} \in \tilde{E}$), on a $|h_{\hat{\alpha}}(\tilde{P}) - h_{\hat{\alpha}}(\tilde{Q})| < 2$. Soit $\alpha = (\tilde{\alpha}, \hat{\alpha}) = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1})$.

Alors, si P, Q sont deux points quelconques de N^S , on a

$$h_{\alpha}(P) - h_{\alpha}(Q) = h_{\tilde{\alpha}}(P) - h_{\tilde{\alpha}}(Q) + [h_{\hat{\alpha}}(P) - h_{\hat{\alpha}}(Q)].$$

Donc si l'on suppose que $P, Q \in E$ et que $\tilde{P}$ et $\tilde{Q}$ sont leurs projections respectives sur H , on aura

$$h_{\tilde{\alpha}}(P) = h_{\tilde{\alpha}}(\tilde{P}), h_{\hat{\alpha}}(\tilde{P}) = h_{\hat{\alpha}}(\tilde{Q}) \text{ et } h_{\tilde{\alpha}}(\tilde{Q}) = h_{\tilde{\alpha}}(Q),$$

$$\begin{aligned} \text{ce qui entraîne } |h_{\alpha}(P) - h_{\alpha}(Q)| &\leq |h_{\hat{\alpha}}(P) - h_{\hat{\alpha}}(\tilde{P})| + \\ &+ |h_{\tilde{\alpha}}(\tilde{P}) - h_{\tilde{\alpha}}(\tilde{Q})| + |h_{\hat{\alpha}}(\tilde{Q}) - h_{\hat{\alpha}}(Q)| < 2 + [4(s-1) - 7] + 2 = 4s - 7, \end{aligned}$$

ce qu'il fallait montrer.

(5.5.4) Lemme. Soit $E \subseteq Z^S$ un sous-ensemble indéfini limite de préévaluation.

Alors $Ep(E) < +\infty$.

Soit donc $E \subseteq Z^S$ une hypersurface indéfinie limite de préévaluation. Soit $E_r = T_r + E$, où $r \in \mathbb{N}$ et $T_r = (r, r, \dots, r) \in N^S$, et soit E_r l'ensemble des points limites de la partition canonique $(\text{int.}(N^S \cap E_r), \text{ext.}(N^S \cap E_r))$ de N^S . Pour tout $t = 1, 2, \dots, s$ on désigne par $n_{r,t}$ le plus petit entier tel que $n_{r,t} \cdot e_t \in E'_r$. Si l'on choisit l'entier r suffisamment grand pour que $n_{r,s} \geq 2$, la remarque (5.1.6) montre que, $E'_r \subseteq N^S$ est un sous-ensemble de type ML de préévaluation dont les points de base sont $n_{r,t} \cdot e_t$, $t = 1, 2, \dots, s$. Il existe donc $\alpha_r \in \mu(E'_r)$ tel que, si E_r° désigne la partie de E telle que $E'_r = T_2 + E_r^\circ$, l'on ait $Ep_{\alpha_r}(E_r^\circ) = Ep_{\alpha_r}(E'_r) < 4s - 7$.

Donc, si r est suffisamment grand, si P_s désigne le point de E se trouvant sur l'axe X_s , et si $Q \in E_r^\circ$, on a $|h_{\alpha_r}(Q) - h_{\alpha_r}(P_s)| < 4s - 7$. Soit $r' > r$. Alors on a aussi $Q \in E_{r'}^\circ$, donc, comme $h_{\alpha_r}(P_s) = h_{\alpha_{r'}}(P_s) = n_s$,

$$\begin{aligned} |h_{\alpha_r}(Q) - h_{\alpha_{r'}}(Q)| &\leq |(h_{\alpha_r}(Q) - h_{\alpha_r}(P_s)) - (h_{\alpha_{r'}}(Q) - h_{\alpha_{r'}}(P_s))| \leq \\ &\leq 2(4s - 7) = 8s - 14. \text{ Mais si } Q = (q_1, q_2, \dots, q_s) \text{ et si } \\ \alpha_r &= (\alpha_{r,1}, \alpha_{r,2}, \dots, \alpha_{r,s-1}), \text{ on a } h_{\alpha_r}(Q) - h_{\alpha_{r'}}(Q) = \\ &= (\alpha_{r',1} - \alpha_{r,1})q_1 + \dots + (\alpha_{r',s-1} - \alpha_{r,s-1})q_{s-1}, \text{ et la valeur absolue de} \\ &\text{cette somme doit \^etre au plus \^egale \^a } 8s - 14 \text{ pour tous les } q_1, q_2, \dots, q_{s-1} \\ &\text{tels que } |q_1| \leq r, \dots, |q_{s-1}| \leq r. \text{ En particulier, si l'on choisit } q_i = -r \text{ et} \\ &q_j = 0 \text{ si } j \neq i, \text{ on voit que } |\alpha_{r',i} - \alpha_{r,i}| \text{ doit \^etre au plus \^egal \^a } \frac{8s - 14}{r}. \end{aligned}$$

Cela montre que quand $r \rightarrow +\infty$ la suite $\alpha_{r,i}$, pour un i fixé, tend vers une limite finie α_i . Posons $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1})$. Alors, on a

$$\begin{aligned} |\alpha_i - \alpha_{r,i}| &= \lim_{r' \rightarrow +\infty} |\alpha_{r',i} - \alpha_{r,i}| \leq \frac{8s - 14}{r}. \text{ Il en r\'esulte que, si } Q \in E_r \\ &\text{(pour } r \text{ assez grand) } |h_\alpha(Q) - h_{\alpha_r}(Q)| \text{ ne d\'epasse pas } (s-1) \frac{8s - 14}{r} r = \\ &= (s-1)(8s - 14), \text{ d'o\^u r\'esulte } |h_\alpha(Q) - h_\alpha(P_s)| = \\ &= |[h_\alpha(Q) - h_{\alpha_r}(Q)] - [h_\alpha(P_s) - h_{\alpha_r}(P_s)] + [h_{\alpha_r}(Q) - h_{\alpha_r}(P_s)]| < \\ &< (s-1)(8s - 14) + 0 + 4s - 7 = 8s^2 - 18s + 7. \text{ Ainsi } Ep_\alpha(E) < 2(8s^2 - 18s + 7), \\ &\text{ce qui ach\^eve la d\'emonstration du lemme.} \end{aligned}$$

(5.5.5) Lemme. Soit $E \subseteq \mathbb{Z}^s$ tel que pour tout $\bar{P} \in \mathbb{Z}^{s-1}$ il existe un $P \in E$ et un seul de projection horizontale $\bar{P}$ et que $Ep(E) < +\infty$. Alors l'ensemble de minceur $\mu(E)$ de E est r\'eduit \^a un seul point, dit la direction de minceur de E .

Soit $e = E_p(E)$. Si $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1})$ et $(\alpha'_1, \alpha'_2, \dots, \alpha'_{s-1}) = \alpha'$ sont deux points distincts de $\mu(E)$, il existe un $i \in \{1, 2, \dots, s-1\}$ tel que $\alpha_i \neq \alpha'_i$. Soit $P_0 = (0, \dots, 0, h)$ un point de E de projection horizontale $\dot{O} = (0, \dots, 0)$. Si P est un point quelconque de E , il est clair que l'on a $h - e = h_\alpha(P) \leq h + e$ et $h - e \leq h_{\alpha'}(P) \leq h + e$ [car $h_\alpha(P_0) = h_{\alpha'}(P_0) = h$], donc $|h_\alpha(P) - h_{\alpha'}(P)| \leq 2e$. Mais, si $P = l e_i + n e_s$, on a $h_\alpha(P) = -\alpha_i l + n$ et $h_{\alpha'}(P) = -\alpha'_i l + n$, ce qui entraîne $|h_\alpha(P) - h_{\alpha'}(P)| = |l| |\alpha'_i - \alpha_i|$. Donc, si l'on choisit l tel que $|l| > \frac{2e}{|\alpha'_i - \alpha_i|}$ on aura $|h_\alpha(P) - h_{\alpha'}(P)| > 2e$, ce qui est impossible, car d'après ce qui précède on aurait $2e < |h_\alpha(P) - h_{\alpha'}(P)| \leq 2e$. On a donc $\alpha = \alpha'$, ce qui achève la démonstration du lemme.

Corollaire : si E est une hypersurface indéfinie limite de préévaluation, $\mu(E)$ est réduit à un seul nombre réel (qui est sa direction de minceur).

En effet, en vertu du lemme 5.5.4, on a $E_p(E) < +\infty$. Comme E est une hypersurface indéfinie limite, il satisfait donc à toutes les hypothèses du lemme précédent (5.5.5), il en résulte que $\mu(E)$ est réduit à un seul nombre réel.

Définition : soit E une hypersurface indéfinie limite de préévaluation, α la direction de minceur de E . Les hyperplans π' et π'' , tels que $\alpha(\pi') = \alpha(\pi'') = \alpha$, $h(\pi') \leq h(\pi'')$ et que la couche fermée $[\pi', \pi'']$ soit d'épaisseur $E_p(E)$ et contienne E , sont dits les hyperplans d'appui inférieur et supérieur de E .

§ (5.6) - PARTITIONS REGULIERES DE Z^S .

(5.6.1) Soit (V, W) une partition de Z^S en deux classes non-vides telles que l'intersection de V (dite classe inférieure de la partition) avec toute translatée entière $T + N^S$ de N^S soit finie (W est dite classe supérieure de la partition).

Définition 1. On dit que la partition (V, W) de Z^S est régulière si la condition suivante est satisfaite : Pour toute translation entière $T \in Z^S$ l'un des deux ensembles V et $T.V$ contient l'autre.

Remarque : Soit (V, W) une partition régulière de Z^S . Si $P \in W$, on a

$$P + e_i \in W$$

quel que soit $i = 1, 2, \dots, s$.

En effet, si $P + e_i$ appartenait à V , en posant $T = -e_i$, on aurait $T.(P + e_i) = P \in W$, donc $T.V \not\subset V$. Comme la partition (V, W) est régulière, on a $T.V \supset V$. Soit $(N^S)'$ une translatée entière de N^S telle que $P + e_i \in (N^S)'$. Alors $V \cap (N^S)'$ n'est pas vide, et l'inclusion $T.V \supset V$ entraîne $P + le_i \in V$, quel que soit $l \in \mathbb{N}$ non nul, ce qui contredirait $V \cap (N^S)'$ est fini. On a par conséquent $P + e_i \in W$.

Définition 2. On appelle ensemble limite d'une partition régulière (V, W) de Z^S l'ensemble des $P \in W$ tels qu'il existe un $i \in \{1, 2, \dots, s\}$ tel que $P - e_i \in V$.

(5.6.2) Soit $E \subseteq Z^S$ une hypersurface indéfinie limite de préévaluation. Il est clair, d'après la proposition (5.1.5) et la définition (5.1.1), que $(\text{int}.E = V, W = \text{ext}.E)$ est une partition régulière de Z^S dont E est l'ensemble limite.

Toutefois, on a dans ce cas, les propriétés supplémentaires suivantes :

1° Si i et j sont des entiers tels que $1 \leq i < j \leq s$, on a

$$P \in V \Rightarrow P + e_i - e_j \in V.$$

2° Il existe un point $P \in E$ et un seul dont la projection horizontale $\bar{P}$ est un point donné de Z^{s-1} .

De façon générale, on a le résultat suivant :

Lemme : Avec les données et les notations précédentes, les conditions 1° et 2° plus haut sont équivalentes aux conditions 1°, 2° et 3° de (5.1.1).

En effet, la condition 2° plus haut est une conséquence de l'existence de la fonction $j_s((z_1, z_2, \dots, z_{s-1}))$ [définition (5.1.1)] et l'entraîne également si l'on prouve que toute parallèle à l'axe X_s passant par un point $P \in Z^s$ contient à la fois des points de V et des points de W .

La condition 1° plus haut est équivalente à l'ensemble des conditions 1° et 2° de la définition (5.1.1).

En effet, si $i < j < s$, la condition 1° plus haut équivaut à $P + e_j \in V \Rightarrow P + e_i = (P + e_j) + e_i - e_j \in V$, autrement dit à $(\forall t \in Z) [t < j_s(\bar{P} + e_j) \Rightarrow t < j_s(\bar{P} + e_i)]$. Mais cette dernière condition équivaut à $j_s(\bar{P} + e_i) \geq j_s(\bar{P} + e_j)$, c'est-à-dire à la condition 2° de (5.1.1).

D'autre part, si $i < j = s$, la condition 1° plus haut qui équivaut à $P + e_s \in V \Rightarrow P + e_i \in V$ peut se transcrire par $(\forall t \in Z) [t+1 < j_s(\bar{P}) \Rightarrow t < j_s(\bar{P} + e_i)]$, ce qui équivaut à $j_s(\bar{P} + e_i) \leq j_s(\bar{P}) - 1$. Et, sous l'hypothèse que (V, W) est une partition régulière, on a $V + e_i \supset V$, donc si $P + e_i \in V$, on a $P \in V$, ce qui montre que $j_s(\bar{P}) \geq j_s(\bar{P} + e_i)$. Ainsi, sous l'hypothèse que (V, W) est une partition régulière, la partie de 1° plus haut relative au cas $j = s$ équivaut à la condition 1° de (5.1.1).

Quant à la condition 3° de (5.1.1), elle est, sous l'hypothèse de régularité de (V, W) , conséquence des conditions 1° et 2° plus haut. En effet, considérons d'abord une parallèle D_i à l'axe X_i passant par un point $P \in V$ (un tel point existe, car $V \neq \emptyset$). La demi-droite positive D_i^+ d'origine P et portée par D_i étant contenue dans la translatée $(N^s)'$ de N^s par la translation T_0 .

qui transporte l'origine $\bar{O}$ sur P , $D_i^+ \cap V \subseteq (N^S)^+ \cap V$ est fini et $D_i \cap W \neq \emptyset$.
 Il en résulte que $D_i \cap E \neq \emptyset$. Donc, pour prouver 3° de (5.1.1), il suffit de
 montrer que toute parallèle D_i à X_i telle que $D_i \cap Z^S \neq \emptyset$ est non-disjointe de V .
 Or, soit $P \in D_i \cap Z^S$ et soit $\bar{P}$ sa projection horizontale. Si $P \in V$, il n'y a
 rien à prouver, on peut donc supposer $P \in W$. Sur la droite verticale passant
 par P , il existe un point (et un seul) $(\bar{P}, j_s(\bar{P}))$ de E , en outre on a, si
 $P = (\bar{P}, p_s)$, $p_s \geq j_s(\bar{P})$ et quel que soit $j < j_s(\bar{P})$, le point $Q_j = (\bar{P}, j)$
 appartient à V . Donc la droite $D_i^{(j)}$ parallèle à l'axe X_i et passant par
 $Q_j = (\bar{P}, j)$ n'est pas disjointe de E quand $j \leq j_s(\bar{P})$. Posons $j = 2j_s(\bar{P}) - p_s - 2$,
 et soit $P' = (\bar{P}', j)$ un point de $D_i^{(j)} \cap E$. Les points P et P' ont toutes leurs
 coordonnées identiques sauf les i -ièmes et les s -ièmes. Soient p_i et p'_i leurs
 ~~i -ièmes~~ coordonnées. Alors, puisque $p_s > j$, on a $p'_i > p_i$. Posons $l_i = p'_i - p_i$.
 Soit $\bar{P}'' = \bar{P} - l_i e_i$. Alors, on a $\bar{P}'' - \bar{P} = \bar{P} - \bar{P}'$ et, puisque les translatées
 entières de E ne se traversent pas, on doit avoir $j_s(\bar{P}'') - j_s(\bar{P}) \geq$
 $\geq (j_s(\bar{P}) - j_s(\bar{P}')) - 1$. Or $j_s(\bar{P}) - j_s(\bar{P}') = j_s(\bar{P}) - j = j_s(\bar{P}) - [2j_s(\bar{P}) - p_s - 2] =$
 $p_s - j_s(\bar{P}) + 2$, ce qui implique $j_s(\bar{P}'') \geq j_s(\bar{P}) + [p_s - j_s(\bar{P}) + 2] - 1 \geq p_s + 1$.
 Ainsi donc, le point $(\bar{P}'', p_s)$ de D_i appartient à V , donc ce que l'on voulait.
 Cela achève la démonstration du lemme.

(5.6.3) Remarque : Soit (V, W) une partition régulière de Z^S dont E est
 l'ensemble limite. La propriété 2° (5.6.2) est une conséquence de la propriété 1°
 (5.6.2).

En effet, supposons que $P = (p_1, p_2, \dots, p_s)$ et $P' = (p'_1, p'_2, \dots, p'_s) \neq P$
 ont la même projection horizontale $\bar{P} = (p_1, p_2, \dots, p_{s-1})$ et appartiennent tous
 les deux à E . On suppose, en outre, que la partition régulière (V, W) vérifie
 la condition 1° (5.6.2). Sans perdre en généralité, on peut aussi supposer que
 $p'_s > p_s$. Mais alors $P' - e_s = (p_1, p_2, \dots, p_{s-1}, p'_s - 1) \in W$, car $p'_s - 1 \geq p_s$
 (définition 1 (5.6.1). Mais $P' \in E$, il existe donc un entier i tel que

$1 \leq i < s$ et $P' - e_i \in V$. La condition 1° (5.6.2) montre alors que $(P' - e_i) + e_i - e_s = P' - e_s \in V$, contrairement à $P' - e_s \in W$ obtenue plus haut. Ainsi, la remarque est démontrée.

(5.6.4) Lemme. Si E est l'ensemble limite d'une partition régulière (V, W) de Z^s , on peut choisir un ordre $X'_1 = X_{j(i)}$ des axes X_j ($j = 1, 2, \dots, s$) tel que E soit une hypersurface indéfinie limite de préévaluation pour ce nouvel ordre des axes.

Il suffit d'après (5.6.2) et la remarque (5.6.3), de prouver que tout couple d'axes X_i, X_j ($1 \leq i, j \leq s, i \neq j$) et indépendamment du point $P \in Z^s$ on a, ou bien (a) " $P \in V \Rightarrow P + e_i - e_j \in V$ " ou bien (b) " $P \in V \Rightarrow P + e_j - e_i \in V$ ", les deux implications n'étant pas, d'ailleurs, exclusives.

En effet, cela étant, considérons dans l'ensemble X_j ($j = 1, 2, \dots, s$), la relation $\leq$ définie par $X_i \leq X_j$ si et seulement si, pour tout $P \in Z^s$ on a $P \in V \Rightarrow P + e_i - e_j \in V$. Cette relation est évidemment réflexive et transitive, c'est donc une relation de préordre (large) total. Si $<$ désigne l'ordre total strict compatible avec ce préordre (pour en obtenir un, il suffit de conserver l'ordre des classes de l'équivalence induite par $\leq$ et d'établir un ordre total strict arbitraire dans chacune de ces classes). Soient

$X'_1 = X_{j(1)} < X'_2 = X_{j(2)} < \dots < X'_s = X_{j(s)}$ les X_i ordonnées par ce nouvel ordre et soient $e'_i = e_{j(i)}$, $i = 1, 2, \dots, s$. Alors, si $i_1 < i_2$, on a $X_{j(i_1)} < X_{j(i_2)}$.

Donc, pour tout $P \in Z^s$, on a $P \in V \Rightarrow P + e'_{i_1} - e'_{i_2} = P + e_{j(i_1)} - e_{j(i_2)} \in V$.

Par conséquent, E possède la propriété 1° (5.6.2). D'après la remarque (5.6.3), E possède aussi la propriété 2° (5.6.2), donc, en vertu de (5.6.2), satisfait aux conditions 1°, 2°, 3° de la définition (5.1.1.). Par conséquent, E est une hypersurface indéfinie limite de préévaluation pour ce nouvel ordre des axes.

On va montrer, maintenant, que l'on a l'une ou l'autre des implications (a), (b) précédentes.

En effet, soit $T = e_i - e_j$. Alors, ou bien $T.V \subset V$, ou bien $T.V = V$, ou bien encore $T.V \supset V$. Dans le premier cas, on a, pour tout $P \in Z^S$, $P \in V \Rightarrow T.P = P + e_i - e_j \in V$, mais il existe un $P \in V \setminus T.V$. Alors, on a $-T.P \in -T.(V \setminus T.V) = -T.V \setminus V$. Donc, on a $P \in V$ mais $-T.P = P + e_j - e_i \notin V$. Dans le second cas, on a $P \in V \Leftrightarrow T.P \in V$, et $P \in V$ implique à la fois $P + e_i - e_j \in V$ et $P + e_j - e_i \in V$. Enfin, dans le dernier cas, on a $P \in V \Rightarrow -T.P \in V$, donc $P \in V \Rightarrow P + e_j - e_i \in V$, mais il existe des $P \in Z^S$ tels que $P \in V$, mais $P + e_i - e_j \notin V$, ce qui achève la démonstration du lemme.

(5.6.5) Soit S une variété de R^S . L'ensemble E des points entiers de S engendre une sous-variété S_E de S (S_E peut être vide ; si $S_E \neq \emptyset$, elle est la translatée de la sous-variété analogue de la translatée homogène S_0 de S).

Une partition (V, W) de S en deux classes telles que $V \neq \emptyset$ est dite régulière, si pour toute translation $T \in Z^S$ de S (c'est-à-dire telle que $T.S = S$, ce qui implique $T.S_E = S_E$, et vice versa, si $E \neq \emptyset$) on a $T.V \supset V$ ou $T.V = V$ ou encore $T.V \subseteq V$.

Remarque : Soit f une application linéaire d'une variété $S \subseteq R^S$ sur une variété $S' \subseteq R^S$, telle que $f(S \cap Z^S) = f(S) \cap Z^S = S' \cap Z^S$. Alors f transforme toute partition régulière de $S \cap Z^S$ en une partition régulière de $S' \cap Z^S$. Si f est une bijection, (V', W') n'est une partition régulière de $S' \cap Z^S$ que si $V' = f(V)$ et $W' = f(W)$, où (V, W) est une partition régulière de $S \cap Z^S$.

(5.6.6) Lemme. On conserve les données et les notations de (5.6.5). Si la dimension de S_E est égale à d et si (V, W) est une partition régulière de S , il existe une bijection linéaire $\lambda : S_E \rightarrow R^d$ qui applique E sur Z^d de manière que l'intersection de $\lambda(V)$ avec toute translatée entière de N^d soit finie.

Si $E = \emptyset$, il n'y a rien à prouver. Supposons que $E \neq \emptyset$ et soit $P_0 \in E = S \cap Z^S$. Les points $P = P_0$, où P parcourt E , forment un réseau $\mathcal{C}$ de rang d ($0 < d \leq s$). Il est clair que $\mathcal{C}$ est l'ensemble des translations entières de S , donc ne dépend pas du choix de P_0 . Soit $(w_1, w_2, \dots, w_d)$ une base de $\mathcal{C}$. On définit, comme suit la partition des $T \in \mathcal{C}$ en classes $\mathcal{C}^+, \mathcal{C}^0, \mathcal{C}^-$ [relativement à (V, W)] : $T \in \mathcal{C}^+, \mathcal{C}^0, \mathcal{C}^-$ selon que $T.V \supset V$ ou $T.V = V$ ou $T.V \subset V$.

Les classes $\mathcal{C}^+, \mathcal{C}^0, \mathcal{C}^-$ sont des demi-groupes additifs.

En effet, si ρ est une des relations $\supset, =, \subset$, la relation $\Gamma_1 \rho \Gamma_2$, où Γ_1, Γ_2 sont deux sous-ensembles de $\mathcal{C}$, est préservée par toute bijection de $\mathcal{C}$ sur lui-même. En particulier, si $T \in \mathcal{C}$, on a $\Gamma_1 \rho \Gamma_2 \Leftrightarrow (T.\Gamma_1) \rho (T.\Gamma_2)$. D'autre part, chacune des trois relations représentées par ρ est transitive. Il en résulte que $(T.V) \rho V$ et $(T'.V) \rho V$ impliquent $(T+T').V = T.(T'.V) \rho T.V$. Mais comme on a $(T.V) \rho V$, la transitivité de ρ implique $(T+T').V \rho V$, ce qui montre que les $\mathcal{C}^\tau$ ($\tau = +, 0, -$) sont des demi-groupes. Il en résulte en particulier que, si q est un entier positif, $T \in \mathcal{C}^\tau$ implique $q.T \in \mathcal{C}^\tau$. Mais alors, vice versa, $q.T \in \mathcal{C}^\tau$ implique $T \in \mathcal{C}^\tau$.

Soient $T_1, T_2, \dots, T_l$ des vecteurs de $\mathcal{C}$ appartenant à un même $\mathcal{C}^\tau$ ($\tau = +, 0, -$). Alors, si $T \in Z^S$ appartient au cône convexe (de sommet $\dot{0}$) engendré par ces vecteurs, on a encore $T \in \mathcal{C}^\tau$. En effet, il existe, par hypothèse, des nombres rationnels positifs $r_1, r_2, \dots, r_l$ tels que

$$T = r_1 T_1 + r_2 T_2 + \dots + r_l T_l$$

Il existe, d'autre part, un entier positif q tel que tous les $q_i = q r_i$ ($i = 1, 2, \dots, l$) soient entiers. Dès lors, $qT = q_1 T_1 + q_2 T_2 + \dots + q_l T_l$ est la somme de $q_1 + q_2 + \dots + q_l$ vecteurs, dont chacun coïncide avec l'un des vecteurs $T_1, T_2, \dots, T_l$, qui appartiennent tous à $\mathcal{C}^{(\tau)}$. Par suite, qT , donc aussi T appartient à $\mathcal{C}^{(\tau)}$.

Il est encore à remarquer que si $T \in \mathcal{C}^{\tau}$ et $T' \in \mathcal{C}^{\circ}$, on a $T + T' \in \mathcal{C}^{\tau}$. En effet $(T.V) \rho V$ et $T'.V = V$ impliquent $(T + T').V = T.(T'.V) = T.V \rho V$. Cela étant, si $w_i \in \mathcal{C}^{-}$, on a $-w_i \in \mathcal{C}^{+}$. Si $\pm w_i \in \mathcal{C}^{+}$ et $w_j \in \mathcal{C}^{\circ}$, on a $w_j \pm w_i \in \mathcal{C}^{+}$. En outre, on a $w_i \in \mathcal{C}^{\circ}$ quel que soit $i = 1, 2, \dots, d$ si et seulement si $\mathcal{C} = \mathcal{C}^{\circ}$, autrement dit $V = E$.

Donc, si $V \neq E$, il existe des $w_i \in \mathcal{C}^{\circ}$, et en numérotant convenablement les w_i , on peut supposer $w_1 \in \mathcal{C}^{\circ}$. Dès lors, si $w_i \notin \mathcal{C}^{\circ}$, soit v_i celui des deux vecteurs w_i , $-w_i$ qui appartient à $\mathcal{C}^{+}$; si $w_i \in \mathcal{C}^{\circ}$, on pose $v_i = w_i + v_1$. L'ensemble $\{v_1, v_2, \dots, v_d\}$ est encore une base de $\mathcal{C}$ et tous les v_i sont dans $\mathcal{C}^{+}$. Dans le cas $V = E$, on pose $v_i = w_i \in \mathcal{C}^{\circ}$ ($i = 1, 2, \dots, d$).

Soit K le cône convexe (de sommet $\dot{O}$) engendré par les vecteurs $v_1, v_2, \dots, v_d$, c'est-à-dire l'ensemble des points $P = r_1 v_1 + \dots + r_d v_d$ où les $r_1, r_2, \dots, r_d$ sont des nombres réels positifs, et où P est intérieur à K si tous les r_i ($i = 1, 2, \dots, d$) sont strictement positifs.

Si $V \neq E$, il est clair que tout point entier de K est un point de $\mathcal{C}^{+}$. Or, il est facile de construire une base $(u_1, u_2, \dots, u_d)$ de $\mathcal{C}$ dont tous les éléments u_i soient des points intérieurs de K (Il suffit de prendre, par exemple, $u_1 = v_1 + v_2 + \dots + v_d$ et, pour tout $i > 1$, $u_i = v_i + u_1$).

Considérons l'application linéaire λ définie par $x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_d u_d \longmapsto (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. Elle applique, évidemment, S_E sur $\mathbb{R}^d$ et E sur $\mathbb{Z}^d$, en outre, elle est injective. Soit $\mathcal{C}'^{\tau}$ l'ensemble des $T \in \mathbb{Z}^d$ tels $T.(\lambda.V) \supset \lambda.V$ ou $T.(\lambda.V) = \lambda.V$ ou encore $T.(\lambda.V) \subset \lambda.V$ selon que $\tau = +, 0, -$. Il est clair, avec les notations adoptées, que $\lambda.T \in \mathcal{C}'^{\tau} \Leftrightarrow T \in \mathcal{C}'^{\tau}$. Par suite, $\mathcal{C}'^{\tau}$ contient $\mathbb{Z}^d \cap \lambda.K$, où $\lambda.K$ est un cône convexe, dont tous les points générateurs sont intérieurs.

Montrons que si $V \neq E$, l'intersection de $\lambda.V$ avec toute translatée entière $(N^d)' = T.N^d$ ($T \in Z^d$) de N^d est finie. Supposons que pour un $T = (t_1, t_2, \dots, t_d) \in Z^d$ ce ne soit pas le cas. Soient $X_i' = TX_i$ les translatées des axes X_i . Comme les images $e_i = (0, \dots, x_i = 1, 0, \dots, 0) = \lambda.u_i$ des $u_i \in \mathcal{G}^+$ sont telles que $e_i + \lambda.V = \lambda.u_i + \lambda.V = \lambda.(u_i + V) \supset \lambda.V$, on aura $P \in \lambda.W \Rightarrow P + e_i \in \lambda.W$. Ainsi, si pour tout i l'intersection $X_i' \cap \lambda.W$ n'est pas vide, l'intersection $(N^d)' \cap \lambda.V$ sera finie. On peut donc supposer que pour un $i = 1, 2, \dots, d$, on a $X_i' \cap \lambda.W = \emptyset$. Par ailleurs, si $V \neq E$, on doit avoir $(N^d)' \cap \lambda.W \neq \emptyset$.

En effet, si P est un point de W et si $P' \in Z^d$ est tel que toutes ses composantes soient supérieures ou égales à celles de P , on aura aussi $P' \in W$ (car tous les e_j sont dans $\mathcal{G}^+$) et toute translatée de N^d contient des points entiers dont toutes les composantes sont aussi grandes que l'on veut. Soit $P = (p_1, p_2, \dots, p_d)$ un point de $(N^d)' \cap \lambda.W$, e_i étant un point intérieur du cône convexe $\lambda.K$, si $r_1, r_2, \dots, r_{i-1}, r_{i+1}, \dots, r_d$ sont strictement positifs et assez petits, $e_i - \sum_{j \neq i} r_j e_j$ est encore un point de $\lambda.K$. Supposons, en outre, que les r_j soient rationnels, et soit q un entier positif tel que pour tout $j = 1, 2, \dots, d$ autre que i , $q_j = qr_j$ soit entier et tel que $qr_j \geq p_j - t_j$. Alors, $S = q(e_i - \sum_{j \neq i} r_j e_j) = qe_i - \sum_{j \neq i} q_j e_j$ appartient à $\lambda.K$, donc, comme il appartient aussi à Z^d , c'est une translation de $\mathcal{G}^+$. En outre, on a $S.P = (p_1 - q_1, \dots, p_{i-1} - q_{i-1}, p_i + q, p_{i+1} - q_{i+1}, \dots, p_d - q_d) \in \lambda.W$. Mais si $j \neq i$, on a $p_j - q_j \leq t_j$ et, par suite, si $S' = \sum_{j \neq i} (t_j - p_j + q_j) e_j$, on a $S' \in \mathcal{G}^+$, donc $Q = (S' + S).P = S.(S'.P) = (t_1, \dots, t_{i-1}, x_i + q, t_{i+1}, \dots, t_d) \in \lambda.W$. Or Q est un point de X_i' , et tout point de cette droite, dont la i -ème composante est

au moins égale à $p_i + q$ appartient à $\lambda.W$, ce qui prouve que $X_i^0 \cap \lambda.W = \emptyset$.

(5.6.7) Théorème. Une hypersurface indéfinie limite $E \subseteq Z^S$ est de préévaluation si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$N_1. \text{Ep}(E) \leq 1$$

N_2 . Si $\mu(E) = \{\alpha\}$ et si Π' est l'hyperplan α -tangent inférieur de E , la partition ($V = \text{int}.E \cap \Pi' = Z^S \cdot E \cap \Pi'$, $W = \text{ext}.E \cap \Pi' = E \cap \Pi'$) de $Z^S \cap \Pi'$ est régulière. Cette condition est automatiquement satisfaite si $\text{Ep}(E) < 1$.

Remarque. Si E est une hypersurface indéfinie limite, l'ensemble des conditions N_1, N_2 est équivalent à la condition suivante :

Il existe un hyperplan non-vertical H' tel que, si H'_+ et H'_- désignent respectivement l'ensemble des $P \in Z^S$ qui sont au-dessus et au-dessous de H' , on a

$$K_1. H'_+ \subset \text{ext}.E \text{ et } H'_- \subseteq \text{int}.E$$

K_2 . Si $H' \cap Z^S \neq \emptyset$ ($V = H' \cap \text{int}.E$, $W = H' \cap \text{ext}.E$) est une partition régulière de $Z^S \cap H'$ telle que $H' \cap \text{ext}.E \neq \emptyset$.

Démonstration de la remarque :

En effet, la condition N_1 du théorème précédent montre, si l'on conserve les notations introduites dans ce théorème, qu'aucun point $P \in \text{int}.E$ ne se trouve au-dessus de Π' et que tout point situé au-dessous de Π' appartient à $\text{int}.E$, donc aucun point $P \in \text{ext}.E$ ne se trouve au-dessous de Π' . Il en résulte, si l'on prend $H' = \Pi'$, que la condition K_1 est satisfaite et la condition K_2 coïncide avec N_2 .

Supposons que H' vérifie la condition K_1 . Alors, comme tout point $P \in E$ est tel que $P - e_s \in \text{int}.E$, $P - e_s$ ne se trouve pas au-dessus de H et on voit que P se trouve dans la couche fermée $[H, H'']$, où H'' est la translatée par e_s de H' . Mais la couche $[H', H'']$ est d'épaisseur 1. On a par conséquent $\text{Ep}(E) \leq 1$. Si H' est l'hyperplan tangent inférieur de E (donc si $H' = \Pi'$), les

conditions N_2 et K_2 coïncident. Sinon, on a $Ep(E) < 1$. On va montrer que dans ce cas N_2 est conséquence de N_1 , ce qui achèvera de montrer que K_1 et K_2 impliquent N_1 et N_2 .

En effet, si $Ep(E) < 1$, E est contenu dans la couche semi-ouverte $[H', H' + e_s[$, dans laquelle il n'y a pour un $\bar{P}$ quelconque dans Z^{S-1} , qu'un et seul $P \in Z^S$ dont $\bar{P}$ est la projection horizontale. Par suite, E est dans ce cas l'ensemble de tous les points entiers de cette couche. On a, en particulier, $H' \cap Z^S \subseteq E \subseteq \text{ext}.E$ et $H' \cap \text{int}.E = \emptyset$.

Ainsi, la partition de $H' \cap Z^S$ considérée dans K_2 a sa classe V vide, donc est régulière et N_2 résulte bien de N_1 si $Ep(E) < 1$.

Démonstration du théorème (5.5.7) :

On sait déjà [lemme (5.5.4) ; corollaire (5.5.5)] qu'une hypersurface indéfinie limite de préévaluation $E \subseteq Z^S$ a une épaisseur finie et que $\mu(E)$ est réduit à un seul point α . Supposons que $Ep(E) > 1$. Soient Π' , Π'' les hyperplans tangents inférieur et supérieur de E , h' et h'' leurs hauteurs respectives.

Alors, on peut trouver des points P' et $P'' \in E$ tels que $h_\alpha(P') - h'$ et $h'' - h_\alpha(P'')$ soient aussi petits que l'on veut, et qu'en particulier (puisque $h'' - h' > 1$), on ait $h_\alpha(P'') - h_\alpha(P' + e_s) = h_\alpha(P'') - h_\alpha(P') - 1 > h_\alpha(P') - h'$. Considérons la translation $T = P' + e_s - P''$ qui transporte P'' en $P' + e_s$ situé au-dessus de $P' \in E$. On a

$$h_\alpha(T.P') = h_\alpha(P') + [h_\alpha(P') + 1 - h_\alpha(P'')] < h_\alpha(P') - (h_\alpha(P') - h') = h'.$$

Il en résulte que $T.P' \in \text{int}.E$, donc $T.P'$ est au-dessous d'un point de E tandis que $T.P'' = P' + e_s$ est au-dessus de $P' \in E$. Ainsi, $T.E$ et E se traversent, donc E n'est pas de préévaluation. Donc, si E est de préévaluation, N_1 doit être satisfaite.

Supposons que N_1 est vérifiée, auquel cas K_1 est vérifiée pour $H' = \Pi'$. Donc, si $P \in \text{int}.E$, on a $h_\alpha(P) \leq h'$ et si $P \in \text{ext}.E$, on a $h_\alpha(P) \geq h'$.

Si une translation entière T est telle que $h_\alpha(T) > 0$, on a $h_\alpha(T.P) = h_\alpha(T) + h_\alpha(P) > h_\alpha(P)$. Par suite, on aura $T.(ext.E) \subseteq ext.E$, ce qui implique $T.int.E \supseteq int.E$. Si $h_\alpha(T) = 0$, autrement dit, si T est une translation entière de Π' , on a $T.(ext.E. \Pi') = ext.E. \Pi'$ et $T.(int.E. \Pi') = int.E. \Pi'$. Il en résulte que $T(int.E) \supseteq int.E \Leftrightarrow T(int.E \cap \Pi') \supseteq int.E \cap \Pi'$ et, de même, $T(int.E) \subseteq int.E \Leftrightarrow T(int.E \cap \Pi') \subseteq int.E. \Pi'$. Donc, la partition $(int.E, ext.E)$ satisfaisant à K_1 est une partition régulière de Z^S si et seulement si $(int.E \cap \Pi', ext.E \cap \Pi')$ en est une de $Z^S \cap \Pi'$. Cela achève la démonstration du théorème.

Corollaire. Une partition (V, W) des points entiers d'une variété $U \subseteq R^S$ est régulière si et seulement s'il existe un hyperplan H' de U vérifiant les conditions suivantes :

- 1° Si D_1, D_2 désignent les deux demi-espaces de $U. H'$, l'un des ensembles $D_1 \cap Z^S, D_2 \cap Z^S$ est contenu dans V , l'autre étant contenu dans W .
- 2° Si l'on pose $V = int.E$ et $W = ext.E$, la condition K_2 est vérifiée pour H' .

En effet, le raisonnement fait à la fin de la démonstration du théorème précédent montre que la partition (V, W) , vérifiant les conditions 1° et 2° du corollaire, est régulière.

D'autre part, soit $\bar{U}$ la sous-variété de U engendrée par $U \cap Z^S$. On suppose que (V, W) est une partition régulière de $U \cap Z^S$.

Si $U \cap Z^S \neq \emptyset$ et engendre un réseau de rang t , on a vu [(5.6.5) et (5.6.6)] qu'il existe une bijection linéaire λ de $\bar{U}$ sur R^t qui applique $U \cap Z^S$ sur Z^t de manière que $\lambda.V$ n'ait qu'une intersection finie avec toute translatée entière de N^t , et qu'en outre $(\lambda.V, \lambda.W)$ est encore une partition régulière de Z^t . Donc, l'hypersurface indéfinie limite E' associée à $(\lambda.V, \lambda.W)$ est de préévaluation dans Z^t . Il existe par conséquent un hyperplan H^* de Z^t tel que les conditions

N_1 et N_2 soient satisfaites pour $(\lambda.V, \lambda.W)$ et H^* .

Mais l'ensemble des conditions N_1 et N_2 pour $(\lambda V, \lambda W)$ et H^* dans Z^t équivaut à l'ensemble des conditions 1° et 2° du corollaire pour (V, W) et $\lambda^{-1}H^*$ dans $\bar{U}$. Donc la partition (V, W) de U vérifie aussi ces conditions pour des hyperplans convenables.

En effet, si H' est un hyperplan arbitraire de U passant par $\lambda^{-1}H^*$, la partition (V, W) vérifie encore les conditions 1° et 2° du corollaire pour H' . Cela achève la démonstration du corollaire.

§ (5.7) - DEMI-DRAPEAUX DANS R^S . APPLICATIONS.

(5.7.1) Drapeaux et demi-drapeaux.

Soit $L \subset R^S$ une variété linéaire de dimension m et soit $P \in L$. On sait que l'on appelle drapeau de L (J. Tits Proc. of the int. Congr. of mathem. 1962, p. 204 ; dans cet article, la notion est introduite pour les variétés projectives, mais une notion analogue existe aussi pour les variétés affines) toute chaîne emboîtée

$$(Dr.) : L^{(0)} \subset L^{(1)} \subset L^{(2)} \subset \dots \subset L^{(t)} .$$

de sous-variétés de L . Le drapeau (Dr) est dit semi-complet d'ordre i si la dimension de $L^{(j)}$ ($j = 0, 1, 2, \dots, t$) est égale à $i + j$ et si $L^{(t)} = L$. Il sera dit complet si, en plus, $i = 0$, c'est-à-dire $L^{(0)} = \{P\}$ avec $P \in L$ (cette définition diffère légèrement de celle de Tits ; nos drapeaux complets s'obtiennent à partir de ceux de Tits en leur ajoutant, comme dernier terme, la variété L).

Si $(Dr.)$ est semi-complet, $L^{(j-1)}$ ($j = 1, \dots, t$) est un hyperplan de $L^{(j)}$, qui partage l'espace non connexe $L^{(j)}$ en deux demi-espaces, ouverts connexes, dits demi-espaces de $L^{(j)}$ d'arête $L^{(j-1)}$.

On appelle demi-drapeau du drapeau $(Dr.)$ précédent, supposé semi-complet, toute suite

$$(D.Dr.) : L^{(0)}, D^{(1)}, D^{(2)}, \dots, D^{(t)}$$

telle que $D^{(j)}$ ($j = 1, 2, \dots, t$) soit un demi-espace de $L^{(j)}$ d'arête $L^{(j-1)}$. De façon générale, une suite $L^{(0)}, D^{(1)}, D^{(2)}, \dots, D^{(t)}$ de sous-ensembles d'une variété $L \subseteq R^S$ est dite demi-drapeau (de L) si elle en est un pour un drapeau semi-complet de L . Si la dimension de $L^{(0)}$ est i , le demi-drapeau $(D. Dr.)$ sera dit d'ordre i . L'ensemble

$S = L^{(0)} \cup D^{(1)} \cup D^{(2)} \cup \dots \cup D^{(t)}$ est dit le support du demi-drapeau $(D. Dr.)$ précédent.

(5.7.2) Théorème. Soit U une variété de R^S . Une partition (V, W) de $Z^S \cap U$ est régulière si et seulement s'il existe un demi-drapeau $(D, Dr.)$ de U tel que V soit l'ensemble des points entiers du support de $(D, Dr.)$.

Soit (V, W) une partition de $U \cap Z^S$ où U est une variété de R^S de dimension t . Supposons le théorème démontré pour les partitions des variétés de dimensions $r < t$. D'après le corollaire (5.6.8) la partition (V, W) est régulière si et seulement s'il existe un hyperplan H' de U tel que (V, W) vérifie les conditions 1° et 2°, du corollaire rappelé plus haut, pour H' . En particulier, l'un des demi-espaces U' de $U \cdot H'$ est tel que $U' \cap Z^S \subseteq V$ et $V = (U' \cap Z^S) \cup (H' \cap V)$. Et, en vertu de l'hypothèse de récurrence appliquée à la variété H' de dimension $< t$, la condition 2° équivaut à l'existence d'un demi-drapeau de H' tel que $H' \cap V$ soit l'ensemble des points entiers de son support.

D'autre part, s'il existe un demi-drapeau

$(D, Dr.)$: $L^{(0)}, D', D'', \dots, D^{(u)}$ de H' tel que $H' \cap V$ soit

l'ensemble des points entiers du support du demi-drapeau considéré, il est clair que

$(D, Dr.)'$: $L^{(0)}, D', D'', \dots, D^{(u)}, D^{(u+1)} = U'$ est un demi-

drapeau de U , et que le support de $(D, Dr.)'$ est la réunion du support de $(D, Dr.)$

et de l'ensemble U' . Par conséquent, la condition 1° équivaut à ce que

l'ensemble des points entiers du support de $(D, Dr.)'$ soit $(V \cdot H') \cup (Z^S \cap U') = U$,

ce qui achève la démonstration du théorème.

(5.7.3) Théorème. Soit $E \subseteq R^S$ une hypersurface indéfinie limite. E est de préévaluation si et seulement si

1° $Ep(E) \leq 1$

2° Si Π' désigne l'hyperplan tangent inférieur de E , $(\Pi' \cdot E) \cap Z^S$ est l'ensemble des points entiers d'un demi-drapeau convenable de Π' .

D'après le théorème (5.7.2), la condition 2° du théorème (5.7.3) équivaut à la condition N_2 du théorème (5.6.7). Le théorème (5.7.3) n'est donc qu'une autre forme du théorème (5.6.7).

(5.7.4) Lemme. Soit $E \subseteq Z^S$ une hypersurface indéfinie limite de prévaluation. On a $Ep(E) < 1$ si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

- 1° L'unique élément $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1})$ de $\mu(E)$ est rationnel.
- 2° Le α -hyperplan tangent inférieur Π' de E est tel que $\Pi' \cap Z^S \subseteq E$.

Supposons $Ep(E) < 1$. Alors la condition 2° résulte de la condition 1°. En effet, si $\Pi' \cap Z^S \not\subseteq E$, il existe des points $P \in \Pi' \cap Z^S$ qui appartiennent à $\text{int}.E$, ce qui entraîne $P + e_s \in \Pi'' \cap E$ (Π'' désigne le α -hyperplan tangent supérieur de E) et $Ep(E) = 1$. D'autre part, si $\alpha \in Q^{s-1}$, il existe sur l'hyperplan homogène Π'_0 parallèle à Π' , $s-1$ périodes entières [(5.3.10), à la fin] indépendantes $T_1, T_2, \dots, T_{s-1}$ qui engendrent $\Pi'_0 \cap Z^S$. Par suite, il existe une période entière $T_s \notin \Pi'_0$ telle que $(T_1, T_2, \dots, T_{s-1}, T_s)$ soit une base de Z^S (sur Z). En outre, il est clair que les hyperplans Π parallèles à Π' et rencontrant Z^S forment un ensemble ordonné, par rapport à leur α -hauteur $h(\Pi) = h_\alpha(\Pi)$, de même type ordinal $\omega^* + \omega$ que Z , d'hyperplans tels que la différence des α -hauteurs de deux consécutifs soit égale à $|h_\alpha(T_s)|$. Il en résulte que si $E \supseteq \Pi' \cap Z^S$ (donc, si E est l'ensemble des points entiers de la couche semi-ouverte $[\Pi', \Pi'']$), on a $Ep(E) = 1 - |h_\alpha(T_s)| < 1$. Par contre si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1})$ n'appartient pas à Q^{s-1} (donc n'est pas rationnel), il existe une composante α_i de α qui est irrationnel. Considérons tous les points $P \in E$ dont toutes les composantes, sauf la i -ème et la s -ième, ont une valeur donnée (par exemple 0). Il y a, au plus, un point entier de cette forme qui appartient à Π' . Si $x_i \in Z$, il y a un seul point $P(x_i) \in E$ dont la i -ème composante est égale à x_i , tandis que sa j -ème composante, pour tout $j \neq i$ et $j \neq s$, est

égale à 0. La s -ième composante de $P(x_i)$ est égale à x_s , qui est le plus grand entier au plus égal à $\alpha_i x_i + h'_\alpha(E) + 1$.

Mais on sait, dans ce cas (à cause de ce que le groupe additif engendré par 1 et α_i est dense sur la droite réelle) que

$-\alpha_i x_i + x_s - h'_\alpha(E) = h'_\alpha(P(x_i)) - h'_\alpha(E)$ peut, pour des valeurs convenables de x_i , être aussi proche que l'on veut, aussi bien de 0 que de 1, donc

$\sup_{P, P' \in E} |h'_\alpha(P) - h'_\alpha(P')| = 1$, c'est-à-dire $E_P(E) = 1$. Ce qui achève la

démonstration du lemme.

(5.7.5) Soient E, F deux hypersurfaces indéfinies limites de préévaluation de $Z^S \subseteq R^S$, α, β leur direction de minceur, L', M' leur hyperplan tangent inférieur, V, W les variétés linéaires engendrées respectivement par $L' \cap Z^S, M' \cap Z^S$, dont les dimensions sont v, w , soient enfin $(D.Dr)(E), (DDr)(F)$ les demi-drapeaux de V, W [théorème (5.7.3)].

$$(D.Dr)(E) : U_0(E), D_1(E), \dots, D_{\overline{v}}(E) \quad (\overline{v} \leq v)$$

$$(D.Dr)(F) : U_0(F), D_1(F), \dots, D_{\overline{w}}(F) \quad (\overline{w} \leq w)$$

tels que $L' \cap E, M' \cap F$ soient respectivement les ensembles des points entiers de leur support. On a

Théorème. Les translatées entières de E et F ne se traversent pas si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

1° $\alpha = \beta$ (ce qui implique, si $L' \cap Z^S \neq \emptyset$ et $M' \cap Z^S \neq \emptyset$, qu'il existe une translation $T_0 \in Z^S$ telle que $T_0 L' = M'$, donc $T_0(L' \cap Z^S) = M' \cap Z^S$, $T_0 V = W$ et $v = w$),

2° ou bien l'une au moins des variétés V, W est vide ou bien il existe une translation $T \in Z^S$ telle que, pour tout i tel que $0 \leq i < \min(\overline{v}, \overline{w})$, on ait

$$T.D_{\overline{v}-i}(E) = D_{\overline{w}-i}(F).$$

Soient $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1})$ et $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{s-1})$. Plaçons E et F dans les positions telles que $0 \in E \cap F$. Alors, puisque $\text{Ep}_\alpha(E) = \text{Ep}(E) \leq 1$ et $\text{Ep}_\beta(F) = \text{Ep}(F) \leq 1$, on a, pour tout $P \in E$ et pour tout $Q \in F$, $|h_\alpha(P)| \leq 1$ et $|h_\beta(Q)| \leq 1$. Or, si $Q = (x_1, \dots, x_{s-1}, x_s)$, on a

$$h_\alpha(Q) = x_s - \sum_{i=1}^{s-1} \alpha_i x_i = \left[x_s - \sum_{i=1}^{s-1} \beta_i x_i \right] + \sum_{i=1}^{s-1} (\alpha_i - \beta_i) x_i = h_\beta(Q) + \sum_{i=1}^{s-1} (\alpha_i - \beta_i) x_i.$$

Donc, si $\sum_{i=1}^{s-1} (\alpha_i - \beta_i) x_i > 2$, on aura $h_\alpha(Q) > 2 - 1 = 1$ et Q est

au-dessus du point de E de même projection horizontale, tandis que si

$\sum_{i=1}^{s-1} (\alpha_i - \beta_i) x_i < -2$, on aura $h_\alpha(Q) < 1 - 2 = -1$ et Q est au-dessous d'un tel point de E.

Or si $\alpha \neq \beta$, il existe un i ($1 \leq i < s$) tel que $\alpha_i - \beta_i \neq 0$.

Considérons les points $Q \in F$ dont la projection horizontale $\bar{Q}$ est de la forme

$(0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0) = x_i e_i$ ($x_i \in \mathbb{Z}$). Pour un tel point, la somme

$\sum_{i=1}^{s-1} (\alpha_i - \beta_i) x_i$ se réduit au seul terme $(\alpha_i - \beta_i) x_i$. Elle est donc > 2 si x_i est de

même signe que $\alpha_i - \beta_i$ et $|x_i| > \frac{2}{|\alpha_i - \beta_i|}$, et elle est < -2 si x_i et $\alpha_i - \beta_i$ sont

de signes contraires et $|x_i|$ satisfait à l'inégalité précédente. Donc, si $\alpha \neq \beta$, E et F se traversent.

Supposons maintenant $\alpha = \beta$. On va démontrer le théorème par récurrence sur s , en supposant qu'il est déjà prouvé pour les hypersurfaces indéfinies limites de tout R^t avec $2 \leq t < s$.

Soit $T \in \mathbb{Z}^s$ et considérons T.E, F. Si $h_\alpha(T.L') = h_\alpha(T) + h(L') \neq h(M')$, il est clair que T.E est au-dessus ou au-dessous de F, selon que $h_\alpha(T) > h(M') - h(L')$ ou $h_\alpha(T) < h(M') - h(L')$. Par suite, si il n'existe

aucune translation $T \in Z^S$ telle que $h_\alpha(T) = h(M') - h(L')$, d'une part, les
translatées entières de E ne traversent pas F et, d'autre part, l'un au moins
des ensembles $L' \cap Z^S$, $M' \cap Z^S$ est vide, donc il en est de même pour une au moins
des variétés V, W. Ainsi le théorème est vrai dans ce cas.

Supposons donc qu'il existe des translations $T \in Z^S$ telles que
 $h_\alpha(T) = h(M') - h(L')$ et que T en est une. Alors, $L' \cap Z^S$ et $M' \cap Z^S$ sont
simultanément vides, et s'ils sont vides, on a $TE = F$, donc T.E et F ne se
traversent pas et le théorème est encore vrai. Si ces ensembles ne sont pas
vides, on a $T V = W$ et $v = w \geq 0$.

Si $P \in L' \cap E$, $T.P$ est au-dessus du point de F de même projection
horizontale si et seulement s'il n'appartient pas à $M' \cap F$ et de même un $Q \in M' \cap F$
est au-dessus du point de T.E de même projection horizontale si et seulement si
 $Q \notin T.(L' \cap E)$. Ainsi T.E traverse F si et seulement s'il existe un point
 $P \in L' \cap E$ et un point $Q \in M' \cap F$ ayant les propriétés indiquées plus haut.
Considérons les cas suivants :

a) $v = w = 0$; b) $v = w = 1$; c) $v = w \geq 2$ (on a nécessairement $v = w \leq s-1$).

Dans le cas a), V et W sont réduites chacune à un point :
 $V = \{P\}$, $W = \{Q\}$, et on doit avoir $T.P = Q$. Dès lors, chacun des ensembles
T E et F est la réunion de l'ensemble des points entiers de la couche ouverte
 $]M', M'+e_s[$ et d'un des points P, $P+e_s$. Donc tous les points de T.E et de F,
sauf peut-être un seul point de chaque ensemble, coïncident. Par conséquent,
T E ne traverse pas F. D'autre part, on a $\bar{v} = \bar{w} = 0$, donc l'ensemble des entiers
qui sont ≥ 0 et $< \min(\bar{v}, \bar{w}) = 0$ est vide, donc le théorème est encore vrai
dans le cas a).

Dans le cas b) V et $T.V = W$ sont des droites contenant une infinité
de points entiers et chacun des ensembles $L' \cap E$, $M' \cap F$ est, ou bien égal à
l'ensemble de tous les points entiers de V, W respectivement, ou bien à

l'ensemble de tels points de deux demi-droites (fermées) $\Delta \subseteq V$, $\theta \subseteq W$ respectivement (on peut supposer que Δ commence au point P et θ au point Q). Si $E \cap L' = V \cap Z^S$, on a $U_0(E) = V$, $\bar{v} = 0$, et si $E \cap L' = \Delta \cap Z^S$, on a $U_0(E) = \{P\}$, $D_1(E) = \Delta \cup \{P\}$ et $\bar{v} = 1$. On a une situation analogue pour $F \cap M'$. Si l'on a $E \cap L' = V \cap Z^S$ ou $F \cap M' = W \cap Z^S$, on a $\min(\bar{v}, \bar{w}) = 0$ et l'ensemble des entiers i tels que $0 \leq i < \min(\bar{v}, \bar{w})$ est vide, donc l'hypothèse du théorème est vérifiée. Mais, d'autre part, on a alors, pour toute translation du type considéré, $T.(E \cap L') \subseteq F \cap M'$ ou $F \cap M' \subseteq T.(E \cap L')$, donc T.E et F ne se traversent pas et le théorème est vrai dans ce cas. Enfin, si $L' \cap E = \Delta \cap Z^S$ et $M' \cap F = \theta \cap Z^S$, on a $\bar{v} = \bar{w} = 1$ et l'ensemble des entiers i tels que $0 \leq i < \min(\bar{v}, \bar{w})$ est $\{0\}$. Si Δ et θ sont orientées dans le même sens, la translation entière T_0 telle que $T_0 P = Q$ amène $D_1(E) = \Delta \cup \{P\}$ sur $D_1(F) = \theta \cup \{Q\}$, en outre, quelle que soit la translation entière T telle que $T.L' = M'$, on a ou bien $T \Delta \subseteq \theta$ ou bien $T \Delta \supseteq \theta$, donc T.E et F ne se traversent pas. Par contre, si les orientations de Δ et θ sont opposées, il ne peut exister aucune translation entière T telle que $T.D_1(E) = T.(\Delta \cup \{P\}) = D_1(F) = \theta \cup \{Q\}$. Mais si $T.V = W$, $T \Delta \cap \theta$ est dans ce cas un segment fini qui ne peut être égal à aucune des demi-droites Δ , θ , donc T.E et F se traversent, le théorème est vrai dans le cas b).

Dans le cas c) : L' , M' sont les sous-variétés linéaires de V, W respectivement, engendrées par les derniers termes des demi-drapeaux (D.Dr) (E), (D.Dr)(F) considérés plus haut. Donc si un de ces demi-drapeaux se réduit à son premier terme (autrement dit $\bar{v} = 0$ ou $\bar{w} = 0$), on a $E \cap L' = V \cap Z^S$ ou $F \cap M' = W \cap Z^S$, d'où résulte, si T est une translation entière appliquant V sur W, que ou bien $T.(E \cap L') \subseteq F \cap M'$ ou bien $F \cap M' \subseteq T.(E \cap L')$, donc T.E et F ne se traversent pas. Mais, dans ce cas, on a $\min(\bar{v}, \bar{w}) = 0$. Donc, l'ensemble des entiers i tels que $0 \leq i < \min(\bar{v}, \bar{w})$ est vide et le théorème est encore vrai.

Supposons que $\bar{v} > 0$ et que $\bar{w} > 0$. Alors $[L' \cap (Z^S \dots E), L' \cap E]$, $[M' \cap (Z^S \dots F), Z^S \dots F]$ sont des partitions régulières de $L' \cap Z^S = V \cap Z^S$, $M' \cap Z^S = W \cap Z^S$ respectivement [(5.6.1), définition 1 ; (5.6.7), remarque]. Soit T une translation entière telle que $T.(L' \cap Z^S) \cap (M' \cap Z^Z) \neq \emptyset$. On sait [(5.6.5) ; lemme (5.6.6)] qu'il existe une bijection linéaire $\varphi : M' \rightarrow R^V$ qui applique $M' \cap Z^S$ sur $Z^V \subseteq R^V$, et telle que $[\varphi.(M' \cap (Z^S \dots F)), \varphi.(M' \cap F)]$ soit une partition régulière de Z^V [(5.6.1)], dont $\varphi.(M' \cap F)$ est la classe supérieure, on note F^* l'ensemble limite de cette partition. Si $U_{\bar{w}-1}^-(F)$ désigne la variété linéaire engendrée par $D_{\bar{w}-1}^-(F)$ (si $\bar{w} > 1$; car, si $\bar{w} = 1$, $U_0(F)$ est déjà définie), il est clair que $M^* = \varphi . U_{\bar{w}-1}^-(F)$ est l'hyperplan tangent inférieur de F^* ; l'épaisseur $Ep(F^*)$ de F^* est ≤ 1 et son ensemble de minceur est réduit à la seule pente $\beta^* = (\beta_1^*, \dots, \beta_{V-1}^*)$ de l'hyperplan M^* de R^V . D'autre part, $[\varphi T.(L' \cap (Z^S \dots E)), \varphi T.(L' \cap E)]$ est une partition régulière de Z^V . Si $U_{\bar{v}-1}^-(E)$ désigne la variété linéaire engendrée par $D_{\bar{v}-1}^-(E)$, il est encore clair que $\varphi T.U_{\bar{v}-1}^-(E)$ est un hyperplan (peut-être vertical) de R^V , dont le complémentaire dans R^V se partage en composantes connexes $\varphi T.D_{(\bar{v})}^-(E)$ et $R^V \dots \varphi T.[U_{\bar{v}-1}^-(E) \cup D_{\bar{v}}^-(E)]$ dont les ensembles de points entiers sont respectivement contenus dans $\varphi T.(L' \cap E)$, $R^V \dots \varphi T.(L' \cap E)$. Si $\varphi T.U_{\bar{v}-1}^-(E)$ est vertical et si $\bar{P}$ est un point quelconque de la projection horizontale $R^V = R^{V-1}$ de R^V n'appartenant pas à la projection horizontale $\varphi T.U_{\bar{v}-1}^-(E)$ de cet hyperplan de R^V , ou bien tous les points $P \in R^V$, dont la projection horizontale est $\bar{P}$, appartiennent à $\varphi T.(L' \cap E)$, ou bien aucun de ces points n'y appartient.

Comme, par ailleurs, un tel point $P = (\bar{P}, x_v)$ est au-dessus de F^* si x_v est assez grand, et il est au-dessous de F^* si x_v est assez petit, il est donc impossible, dans le cas considéré, que par exemple, l'un des ensembles $T.(L' \cap E)$, $M' \cap F$ contienne l'autre. Si $L^* = \varphi T.U_{\bar{v}-1}^-(E)$ n'est pas vertical, et si $\alpha^* = (\alpha_1^*, \dots, \alpha_{V-1}^*)$ est la pente de cet hyperplan de R^V , tous les points

entiers de l'une des couches semi-ouvertes $]L^*, L^* + e_v]$, $]L^*, L^* - e_v]$ appartiennent à $\varphi T.(L' \cap E)$, tandis que tous ceux de l'autre appartiennent à $R^V \dots \varphi T.(L' \cap E)$. Si $\alpha \neq \beta$, on voit en répétant le raisonnement du début de la démonstration, que toute translatée entière (dans R^V) de chacune des couches précédentes a des points entiers communs aussi bien avec $\varphi.(M' \cap F)$ qu'avec son complémentaire dans R^V . D'autre part, si $\alpha^* = \beta^*$ [donc $\varphi T.(L' \cap E)$ et $Z^V \dots \varphi T.(L' \cap E)$ sont les deux classes d'une partition régulière de Z^V dont l'ensemble des points limites est nécessairement de préévaluation] aucun des ensembles $\varphi T.(L' \cap E)$, $T(M' \cap F)$ ne contient l'autre, si $\varphi T.(L' \cap E)$ est la classe int. de cette partition ; car, alors $T.(M' \cap E)$ se trouve au-dessus de l'hyperplan $M^* = \varphi U_{w-1}^-(F)$, tandis que $\varphi T.(L' \cap E)$ se trouve au-dessous de l'hyperplan $L^* = \varphi T U_{v-1}^-(E)$, qui est parallèle à M^* . Ainsi, si toutes les translatées entières (dans R^V) de $\varphi T.(L' \cap E)$ sont, selon la translation, contenues dans $\varphi.(M' \cap E)$ ou le contiennent (au sens large), il en résulte, nécessairement, que $\varphi T.[U_{v-1}^-(E)]$ n'est pas vertical, que $\alpha^* = \beta^*$, ce qui implique que la partition de Z^V en $\varphi T.(L' \cap E)$ et $Z^V \dots \varphi T$ est de préévaluation et que si E^* est l'ensemble des points limites de la partition précédente, on a $\text{ext}.E^* = \varphi T.(L' \cap E)$. Or, sous ces conditions, $L^* = \varphi T.[U_{v-1}^-(E)]$ est l'hyperplan tangent inférieur de E^* , et $L^* \cap E^*$ l'ensemble des points entiers du demi-drapeau suivant de L^* :

$$\varphi T.U_0(E), \varphi T.D_1(E), \dots, \varphi T.D_{v-1}^-(E) \subseteq L^*$$

tandis que $M^* \cap F^*$ est l'ensemble des points entiers du demi-drapeau suivant de M^* :

$$\varphi U_0(F), \varphi D_1(F), \dots, \varphi.D_{v-1}^-(F) \subseteq M^*.$$

D'autre part, les mêmes conditions précédentes étant supposées remplies, la condition nécessaire et suffisante pour que toute translatée entière de $\varphi T.(L' \cap E)$ soit contenue dans $\varphi.(M' \cap F)$ ou le contienne est que les translatées entières de F^* ne traversent pas E^* .

Or, comme $v < s$, cela à lieu, en vertu de l'hypothèse de récurrence, si, et seulement si il existe une translation $\tau_0 \in Z^V$ telle que, pour tout entier i tel que $0 \leq i \leq \min(\bar{v}-1, \bar{w}-1) = \min(\bar{v}, \bar{w}) - 1$, elle applique $\varphi T \cdot D_{\bar{v}-1-i}^-(E)$ sur $\varphi \cdot D_{\bar{w}-1-i}^-(F)$. Or, il est clair que pour une telle translation τ_0 , on a $\tau_0 L^* = M^*$, d'où résulte aussi $\tau_0 \cdot [\varphi T \cdot (D_{\bar{v}}^-(E))] = \varphi \cdot D_{\bar{w}}^-(F)$.

Si $\mathcal{G}_{M'}$ est l'ensemble de toutes les périodes de M' , il est clair que l'ensemble des translations entières T' telles que $T'L' = M'$ (en supposant que l'on a déjà prouvé que les hyperplans L', M' de R^S sont parallèles et que de telles T' existent) est une classe à gauche $\mathcal{G}_{M', T}$ (au sens de la composition des applications) modulo $\mathcal{G}_{M'}$. Mais il est aussi clair que $\varphi : M' \rightarrow R^V$ transforme $\mathcal{G}_{M'}$ en un groupe (additif) Z^V des translations entières de R^V . Ainsi on a $\varphi \mathcal{G}_{M'} \varphi^{-1} = Z^V$ et $\tau_0 \in Z^V$ est égal à $\varphi T'_0 \varphi^{-1}$, avec $T'_0 \in \mathcal{G}_{M'}$. D'autre part, l'ensemble des translatées entières de $\varphi T \cdot (L' \cap E)$ est $Z^V \cdot [\varphi T \cdot (L' \cap E)] = (\varphi \mathcal{G}_{M'} \varphi^{-1}) \cdot [\varphi T \cdot (L' \cap E)] = \varphi \mathcal{G}_{M'} \varphi^{-1} T \cdot (L' \cap E) = \varphi \cdot [\mathcal{G}_{M', T} \cdot (L' \cap E)]$. C'est donc l'ensemble des images par φ de toutes les translatées $T' \cdot (L' \cap E)$ de $L' \cap E$ par toutes les translations entières T' de Z^S telles que $T'L' = M'$. Ainsi, $T' \cdot (L' \cap E)$ est, pour chaque translation de cette sorte, ou bien $\subseteq M' \cap F$ ou bien $\supseteq M' \cap F$ si, et seulement si $\alpha^* = \beta^*$, $\varphi T \cdot (L' \cap E) = \text{ext. } E^*$ et aucune translatée entière de E^* ne traverse F^* , ce qui a lieu, comme on l'a déjà vu, si et seulement si il existe une translation $\tau_0 \in Z^V$ telle que, pour tout entier i tel que $0 \leq i < \min(\bar{v}, \bar{w})$, $\tau_0 \cdot [\varphi T \cdot D_{\bar{v}-i}^-(E)] = \varphi \cdot D_{\bar{w}-i}^-(F)$. Or, $T_0 = \varphi^{-1} \tau_0 \varphi \in \mathcal{G}_{M'}$, donc $(T_0 + T) \cdot L' = T_0 \cdot (T \cdot L') = T_0 M' = M'$ et on a, pour tout entier i satisfaisant aux inégalités précédentes, $\varphi (T_0 + T) \cdot D_{\bar{v}-i}^-(E) = (\varphi T_0) \cdot [\varphi T \cdot D_{\bar{v}-i}^-(E)] = (\varphi T_0 \varphi^{-1}) \cdot [\varphi T \cdot D_{\bar{v}-i}^-(E)] = \tau_0 \cdot [\varphi T \cdot D_{\bar{v}-i}^-(E)] = \varphi \cdot D_{\bar{w}-i}^-(F)$. Comme φ est une bijection, ce qui précède équivaut à l'existence d'une translation $T' = T_0 + T$ telle que $T'L' = M'$, qui satisfait, pour tout entier i tel que

$0 \leq i < \min(\bar{v}, \bar{w})$, à $T'D_{v-i}^-(E) = D_{w-i}^-(F)$, ce qui achève la démonstration du théorème.

Corollaire 1. Soient $E_1, \dots, E_q$ des hypersurfaces indéfinies limites de préévaluation dans Z^S . Alors, leurs translatées entières ne se traversent pas si, et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

1° leurs directions de minceur α_i coïncident

2° soient $L_i^!$ ($i = 1, \dots, q$) les hyperplans tangents inférieurs à E_i , soient $E_1, \dots, E_{q'}$ ($q' \leq q$) tous les E_i telles que $L_i^! \cap Z^S \neq \emptyset$, soient pour tout i tel que $1 \leq i \leq q'$

$$(D, Dr)(E_i) : \quad U_0(E_i), D_1(E_i), \dots, D_{v_i}(E_i)$$

le demi-drapeau de $L_i^!$ tel que $L_i^! \cap E_i$ soit l'ensemble des points entiers de son support et soit i_0 un entier tel que $v_{i_0} = \max_{1 \leq i \leq q} (v_i)$. Alors, pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq q'$ et $i \neq i_0$, il existe une translation entière T_i telle que pour tout entier j satisfaisant à l'inégalité $0 \leq j \leq v_i$, on a

$$T_i \cdot D_{v_i-j}(E_j) = D_{v_{i_0}-j}(E_{i_0})$$

En effet, T_{i_0} satisfait aux conditions du théorème précédent pour tout couple E_j, E_{i_0} et plus généralement $T_{i_0}, -T_{i_0}$ y satisfait pour tout couple $E_{i_1}, E_{i''}$ ($1 \leq i', i'' \leq q$).

Corollaire 2. En particulier si $s = 2$, les translatées entières de $E_1, \dots, E_q$ ne se traversent pas si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites

1° Toutes les hypersurfaces indéfinies limites de préévaluation E_i ($i=1, \dots, q$) ont la même direction de minceur α (donc le même Λ).

2° Si α est irrationnel, la condition 1° suffit.

3° Si α est rationnel et si $S = S(\Lambda, \xi_j)$ est la courbe de R^2 dont E_j est l'ensemble des points entiers, il n'existe pas d'entier i, j ($1 \leq i, j \leq q$) tels que $\xi_i = +$ et $\xi_j = -$.

Corollaire 3. Soient $E_1, \dots, E_q$ des hypersurfaces indéfinies limites de préévaluation dans Z^S qui sont périodiques, soit

$$E_i = S(\Lambda^{(i)}, 0) \cap Z^S.$$

Leurs translatées entières ne se traversent pas si, et seulement si leurs directions de minceur $\alpha_i = \alpha(\Lambda^{(i)})$ ($i = 1, \dots, q$) coïncident, autrement dit si, et seulement si on a

$$\Lambda^{(1)} = \Lambda^{(2)}, \dots, \Lambda^{(q)}.$$

Il est clair que les égalités $\Lambda^{(1)} = \dots = \Lambda^{(q)}$ ont lieu si, et seulement si toutes les E_i [ou $S(\Lambda^{(i)}, 0)$] sont des translatées entières de l'une d'entre elles.

(5.7.6) Soient E une hypersurface indéfinie limite de préévaluation telle que $Ep(E) = 1$, $\mu(E) = \{\alpha\}$ et $H' = H'_\alpha$, $H'' = H''_\alpha$ les hyperplans α -tangents inférieur et supérieur à E . Alors $H' \cap E = H' \cap \text{ext.}E$ est l'ensemble des points entiers du support S d'un demi-drapeau de H' , tandis que $H' \cap \text{int.}E$ est celui des points entiers de son complémentaire. Or il est clair que S et H' sont des ensembles convexes. Il en résulte que les enveloppes convexes de $H' \cap E$ et de $H' \cap \text{int.}E$ ne se coupent pas, et il en est de même de leurs projections horizontales. Or la projection horizontale de l'enveloppe convexe de $H'' \cap E$ est la même que celle de $H' \cap \text{int.}E$. Ainsi les projections horizontales des enveloppes convexes de $H' \cap E$ et de $H'' \cap E$ ne se coupent pas.

Soit F un sous-ensemble fini de E . Alors les projections horizontales des enveloppes convexes de $H'_\alpha \cap F = (H' \cap E) \cap F$ et de $H''_\alpha \cap F = (H'' \cap E) \cap F$ ne se coupent pas non plus, ce qui implique, en vertu du lemme 6 dans (9.3), $\alpha \notin \mu(F)$, donc $Ep(F) < Ep_\alpha(F) \leq Ep_\alpha(E) = Ep(E) = 1$.

Proposition. Un ensemble F de type ML de préévaluation est prolongeable si, et seulement si $Ep(F) < 1$.

En effet, si $Ep(F) < 1$, F est prolongeable [(5.5.7)]. Supposons F prolongeable. Alors F est un sous-ensemble fini d'une hypersurface indéfinie limite de préévaluation E et on a $Ep(F) \leq Ep(E) \leq 1$. Mais si $Ep(E) = 1$, on a, en vertu de ce qui précède, $Ep(F) < Ep(E)$. Ainsi, dans tous les cas, on a $Ep(F) < 1$.

Corollaire. Tout ensemble de type ML de préévaluation est périodiquement prolongeable (c'est-à-dire est égal à une partie finie d'une hypersurface indéfinie limite de préévaluation, qui est périodique).

Chapitre VI

CARACTERISATION EXPLICITE DES HYPERSURFACES INDEFINIES LIMITES DE PREVALUATION DANS Z^2 A PARTIR DE LEURS INVARIANTS

§ (6.1) - GENERALITES.

Rappelons la définition des hypersurfaces indéfinies limites de préévaluation dans Z^2 [(5.1)] et certaines de leurs caractérisations obtenues précédemment [(5.1.4), (5.6.7), (5.6.8), (5.7.2) et (5.7.3)].

(A) Un ensemble E de points $(x_1, x_2) \in Z^2$ est une hypersurface indéfinie limite de préévaluation si,

1° Pour tout $x_1 \in Z$ il existe un et un seul point $P = (x_1, j(x_1)) \in E$ de projection horizontale x_1 .

2° $j(x_1)$ est une application décroissante de Z sur Z , telle que $j(x_1) - j(x_1+1) \leq 1$, donc :

pour tout $x_2 \in Z$, l'ensemble des $x_1 \in Z$ tels que $j(x_1) = x_2$ est non-vidé et fini (si l'on note $i(x_2)$ le plus petit de ces x_1 , $i(x_2)$ est une fonction strictement décroissante de Z dans Z).

3° Les translatées entières de E ne se traversent pas mutuellement (ou, ce qui revient au même, ne traversent pas E).

(B) Un sous-ensemble $E \subseteq Z^2$ satisfaisant aux conditions 1° et 2° de (A) est une hypersurface indéfinie limite. Elle est de préévaluation si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

1° $Ep(E) \leq 1$, ce qui implique que l'ensemble de minceur $\mu(E)$ de E est réduit à un point $\alpha \in R$; cet α est dit la direction de minceur de E et est tel que $-1 \leq \alpha < 0$.

2° Si L' et L'' sont les α -tangentes inférieure et supérieure de E et si $Ep(E) = 1$, le sous-ensemble $E' = E \cap L'$ est un demi-drapeau de L' [(5.7.1)].

On se propose, dans ce qui suit, de déterminer la forme explicite des hypersurfaces indéfinies limites de préévaluation $E \subseteq \mathbb{Z}^2$. On conserve les notations déjà introduites. En particulier, e_1, e_2 désignent les vecteurs $(1,0)$ et $(0,1)$ de l'espace vectoriel réel $\mathbb{R}^2$. De sorte que l'on a $L'' = L' + \text{Ep}(E)e_2$ [si $\text{Ep}(E) = 1$, on a $L'' = L' + e_2$].

(6.1.1) Lemme. Soient $E \subseteq \mathbb{Z}^2$ une hypersurface indéfinie limite de préévaluation, L' et L'' les α -tangentes inférieure et supérieure de E . On a :

1° Si $\text{Ep}(E) < 1$, E est l'ensemble des points entiers de la bande semi-ouverte $[L', L' + e_2[$.

2° Si $\text{Ep}(E) = 1$, E est la réunion de $E \cap L'$, $[(\mathbb{Z}^2 \cdot E) \cap L'] + e_2$ et de l'ensemble des points entiers de la bande ouverte $]L', L''[=]L', L' + e_2[$.

On sait que $E \subseteq [L', L''] = [L', L' + \text{Ep}(E)e_2]$. Donc, si $\text{Ep}(E) < 1$, on a $[L', L''] \subseteq [L', L' + e_2[$. Cette dernière bande ne contient, pour tout $x_1 \in \mathbb{Z}$, qu'un seul point de $\mathbb{Z}^2$ de projection horizontale x_1 , ce qui prouve le 1° du lemme.

Si $\text{Ep}(E) = 1$, on a

$E = (E \cap L') \cup (E \cap]L', L''[) \cup (E \cap L'')$, où $L'' = L' + e_2$, et où les ensembles $E \cap L'$ et $E \cap L''$ ne sont pas vides. Soit D_{x_1} la droite verticale d'équation

$X_1 = x_1$, avec $x_1 \in \mathbb{Z}$. On ne peut avoir que les deux cas suivants :

(a) $D_{x_1} \cap [L', L'']$ contient un seul point de $\mathbb{Z}^2$, qui appartient nécessairement à $]L', L''[\cap E$.

(b) D_{x_1} contient deux points de $\mathbb{Z}^2$, l'un de ces points $P' \in L'$, l'autre $P'' \in L''$, donc $]L', L''[$ ne contient aucun point entier. Mais alors un et un seul des points P' et P'' appartient à E , autrement dit, ou bien $D_{x_1} \cap E = \{P'\}$, où $P' \in L' \cap E$; ou bien $D_{x_1} \cap E = \{P''\} = \{P' + e_2\}$, où $P' \notin E$, donc $P' \in (\mathbb{Z}^2 \cdot E) \cap L'$, ce qui prouve le 2° et achève la démonstration du lemme.

Remarque : Si α est la direction de minceur d'une hypersurface indéfinie limite de préévaluation $E \subseteq \mathbb{Z}^2$ et si $\bar{E}'$ est la projection horizontale de $E' = E \cap L'$, les conclusions 1° et 2° du lemme précédent peuvent s'énoncer sous la forme suivante :

(1°)' Si $E_p(E) < 1$, on a $E = \{P \in \mathbb{Z}^2 ; h(L') \leq h_\alpha(P) < h(L') + 1\}$

(2°)' Si $E_p(E) = 1$, on a $E = E' \cup E^* \cup E''$

où

$$E' = \{P \in \mathbb{Z}^2 ; h_\alpha(P) = h(L'), \bar{P} \in \bar{E}'\}$$

$$E^* = \{P \in \mathbb{Z}^2 ; h(L') < h_\alpha(P) < h(L') + 1\}$$

$$E'' = \{P \in \mathbb{Z}^2 ; h_\alpha(P) = h(L') + 1, \bar{P} \notin \bar{E}'\}$$

($\bar{P}$ désigne la projection horizontale de P).

(6.1.2) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On note

$$\mathcal{H}_\alpha$$

l'ensemble des α -hauteurs des $P \in \mathbb{Z}^2$, et

$$\bar{L}$$

la projection horizontale de $L \cap \mathbb{Z}^2$, où L est une droite de pente α .

Lemme 1. Les notations précédentes étant conservées, on a

(a) Si α est rationnel et si d ($d > 0$) est le dénominateur de α , sous sa forme irréductible, l'ensemble $\mathcal{H}_\alpha$ est le sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ engendré par d^{-1} .

(b) Si α est irrationnel, l'ensemble $\mathcal{H}_\alpha$ est le sous-groupe additif $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$, qui est dense dans $\mathbb{R}$.

Si $P = (p_1, p_2) \in \mathbb{Z}^2$, on a par définition $h_\alpha(P) = -\alpha p_1 + p_2$, ce qui prouve que $\mathcal{H}_\alpha = \mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$. Mais on sait (voir, par exemple, P. Samuel, Théorie algébrique des nombres, p. 66) que $\mathbb{Z} + \alpha\mathbb{Z}$ est dense dans $\mathbb{R}$, si α est irrationnel. Cela prouve (b).

Si α est rationnel tel que $\alpha = \frac{n}{d}$, où n et d sont des entiers premiers entre eux avec $d > 0$, on a

$$Z + \alpha Z = Z + \frac{n}{d} Z = d^{-1} (dZ + nZ) = d^{-1} Z$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

Remarque 1. Avec les notations déjà adoptées, le lemme 1 montre que, si $E \subseteq Z^2$ est une hypersurface indéfinie limite de préévaluation dont la direction de minceur est α , on a

1° $Ep(E) = 1$, si α est irrationnel

[ce résultat est déjà obtenu dans (5.7.4)], et

2° Si $Ep(E) < 1$, auquel cas α est rationnel, $Ep(E) = \frac{d-1}{d}$.

En effet, si α est irrationnel, d'après (a) du lemme 1, $\mathcal{H}_\alpha$ est dense dans $\mathbb{R}$. Donc, si $Ep(E) < 1$, c'est-à-dire, $h(L'') < h(L') + 1$, il existe un point $P = (p_1, p_2) \in Z^2$ tel que $h(L'') < h_\alpha(P) < h(L') + 1$ et c'est l'unique point de Z^2 dans la bande $[L', L' + e_2[$. Comme ce point n'appartient pas à $[L', L'']$, on voit que E ne contient aucun point de projection horizontale p_1 , ce qui est absurde. Cela prouve le 1°.

Si $Ep(E) < 1$, auquel cas α est rationnel, on a $Ep(E) = \frac{d-1}{d}$. Car, il existe dans $E = [L', L' + e_2[\cap Z^2$ (voir lemme (6.1.1)) deux points dont la différence des α -hauteurs est égale à $\frac{d-1}{d}$, mais il n'existe pas, dans E , de couple de points dont la valeur absolue de la différence des α -hauteurs soit plus grande. Cela achève la démonstration de la remarque.

Lemme 2. Soient $E \subseteq Z^2$ une hypersurface indéfinie limite de préévaluation et α sa direction de minceur. Si α est rationnel et si L', L'' sont les α -tangentes inférieure et supérieure de E , les ensembles $L' \cap E \subseteq L' \cap Z^2$ et $L'' \cap E \subseteq L'' \cap Z^2$ ne sont pas vides.

On a $-\infty < h(L') = \inf_{P \in E} (h_\alpha(P))$. Mais d'après le (a) du lemme 1,

$\mathcal{H}_\alpha = d^{-1}Z$, où d est un entier strictement positif. Le minimum $h(L')$ est donc atteint sur $\mathcal{H}_\alpha$. Il existe, par conséquent, des $P \in E$ qui sont dans L' ; on a donc $L' \cap E \neq \emptyset$. Un raisonnement analogue au précédent, en remplaçant inf. par sup., montre que l'on a aussi $L'' \cap E \neq \emptyset$.

Lemme 3. Soit $L \subseteq \mathbb{R}^2$ une droite non-verticale de pente α , telle que $L \cap Z^2 \neq \emptyset$, et soit $\bar{L}$ la projection horizontale de $L \cap Z^2$. Alors

(a) Si α est rationnel et si $d > 0$ désigne le dénominateur de la forme irréductible de α , $\bar{L}$ est une classe (mod. d) dans Z .

(b) Si α est irrationnel $L \cap Z^2$ est réduit à un seul point.

Soit $P = (p_1, p_2) \in Z^2 \cap L$ et soit $P' = (p'_1, p'_2)$ un point quelconque de Z^2 . Pour que $P' \in L$, il faut et il suffit que $\alpha(p_1 - p'_1) + (p'_2 - p_2) = 0$.

Si $p'_1 = p_1$, on a aussi $p'_2 = p_2$ et $P = P'$. Si $p'_1 \neq p_1$ on a $\alpha = \frac{p_2 - p'_2}{p_1 - p'_1}$. Donc,

pour qu'un tel P' existe, il faut que α soit rationnel. Si $\alpha = \frac{n}{d}$ ($d > 0$, et

$\frac{n}{d}$ est la forme irréductible de α), l'égalité $\alpha = \frac{p_2 - p'_2}{p_1 - p'_1}$, si $p_1 \neq p'_1$,

équivalait à $n(p_1 - p'_1) = d(p_2 - p'_2)$, ce qui implique $p'_1 \equiv p_1 \pmod{d}$. Mais si

$p'_1 \equiv p_1 \pmod{d}$, le point $(p'_1, p'_2 = p_2 + \frac{n}{d}(p'_1 - p_1)) \in L \cap Z^2$, ce qui achève

la démonstration du lemme.

(6.1.3) On se propose de rechercher les périodes (si elles existent) d'une hypersurface indéfinie limite de préévaluation $E \subseteq Z^2$ et d'étudier le groupe

ordonné $\mathcal{C}_E = Z^2 / \mathfrak{N}_E$ quotient du groupe des $T \in Z^2$ [préordonné par la relation $<_E$

définie dans (5.2.1)] par son sous-groupe $\mathfrak{N}_E$ formé des périodes de E .

Proposition 1. Le groupe $\mathfrak{N}_E$ des périodes d'une hypersurface indéfinie limite de préévaluation $E \subseteq \mathbb{Z}^2$ est trivial (c'est-à-dire réduit à $\dot{0}$) si $\text{Ep}(E) = 1$, et il est un groupe cyclique infini, engendré par la période minimale $P_0 = (d, n)$, si $\text{Ep}(E) < 1$ et si $\frac{n}{d}$ est la forme irréductible de la direction de minceur α de E (il s'agit donc, si $\text{Ep}(E) < 1$, du cas que l'on a appelé périodique dans (5.2.1) remarque 5).

Une translation $T = (t_1, t_2) \in \mathbb{Z}^2$ est une période de E si et seulement si elle laisse invariante la plus petite bande fermée $[L', L'']$ contenant E (L', L'' sont les tangentes inférieure et supérieure de E). Mais cela exige que $TL' = L'$ et que $L' \cap E$ soit invariant par T . Or, si $\text{Ep}(E) = 1$, ou bien α est irrationnel, auquel cas $L' \cap E$ est réduit à un seul point, ou bien $L' \cap E$ est l'ensemble des points entiers d'un demi-drapeau contenu dans L' et lui est distinct [(5.7.3) et (5.7.4)].

Dans chacun des cas précédents, la translation T est nécessairement la translation nulle ($T = \dot{0}$).

Si $\text{Ep}(E) < 1$, on a $L' \cap E = L' \cap \mathbb{Z}^2$ ((5.7.4)), en outre cet ensemble n'est préservé que par les seules translations qui sont multiples de P_0 . [(6.1.2), lemme 3]. Ces multiples de P_0 sont d'ailleurs les seules translations T telles que $h_\alpha(T) = 0$.

Proposition 2. On conserve les données et les notations introduites au début de ce numéro, ainsi que celles introduites dans la proposition 1.

1° Si $\text{Ep}(E) < 1$, ou si α est irrationnel, $\mathbb{Z}^2 / \mathfrak{N}_E$ est isomorphe, en tant que groupe totalement ordonné, au groupe $\mathcal{H}_\alpha$ ordonné par l'ordre habituel des nombres réels (dont le rang ordinal est 1 pour cet ordre) l'isomorphisme étant réalisé par $t = (t_1, t_2) \mapsto h_\alpha(t) = -\alpha t_1 + t_2$. En outre,

(a) si $\text{Ep}(E) < 1$, $\mathbb{Z}^2 / \mathfrak{N}_E$ est le groupe cyclique d'ordre infini, engendré par une translation T_0 telle que $h_\alpha(T_0) = d^{-1}$ et $e_2 \equiv dT_0 \pmod{\mathfrak{N}_E}$.

(b) Si α est irrationnel, $Z^2/\mathfrak{N}_E$ est égal à Z^2 .

2° Si $\text{Ep}(E) = 1$ et si α est rationnel de représentation irréductible $\frac{n}{d}$ ($d > 0$), $Z^2/\mathfrak{N}_E$ est de rang ordinal 2 et $T \rightarrow h_\alpha(T)$ est un homomorphisme croissant de Z^2 sur $\mathcal{H}_\alpha$ dont le noyau est engendré par $P_0 = (d, n)$. On a $P_0 > \dot{0}$ ou $P_0 < \dot{0}$, selon que $L' \cap E$ est l'ensemble des points entiers d'une demi-droite de L' orientée dans le sens des abscisses croissantes ou décroissantes.

De plus, $Z^2/\mathfrak{N}_E$ est toujours engendré par $T_0 \in Z^2$ telle que $h_\alpha(T_0) = d^{-1}$ et on a, pour tout $m \in Z$, $-T_0 < mP_0 < T_0$.

Il est clair que $\mathcal{H}_\alpha$ est un sous-groupe du groupe additif des nombres réels, et que l'application $T = (t_1, t_2) \mapsto h_\alpha(t_1, t_2) = -\alpha t_1 + t_2$ est un homomorphisme de Z^2 dans $\mathcal{H}_\alpha$. Le noyau Π de l'homomorphisme précédent est le sous-ensemble des $T \in Z^2$ telles que $h_\alpha(T) = 0$, c'est-à-dire, le groupe cyclique (qui est infini) engendré par $P_0 = (d, n)$, si α est rationnel et $\frac{n}{d}$ ($d > 0$) est sa représentation irréductible, ou le groupe réduit à $\{\dot{0}\}$ si α est irrationnel.

D'autre part, si l'on a $h_\alpha(T) > h_\alpha(T')$, on a nécessairement ⁽¹⁾ $T > T'$, car, dans ce cas, pour tout $P \in T.E$, on a $h_\alpha(P) \geq h_\alpha(T) + h_\alpha(L')$, tandis que, $h_\alpha(T') + h(L') = \inf_{P \in T'.E} h_\alpha(P)$ et il existe $P \in T'.E$ tel que $h_\alpha(P) < h_\alpha(T) + h(L')$.

Il en résulte, en particulier, que si $h_\alpha(T) > h_\alpha(T')$ et T'' est un élément arbitraire de la classe $T' + \mathfrak{N}_E \pmod{\mathfrak{N}_E}$, on a $T > T''$, car $h_\alpha(T'') = h_\alpha(T') < h_\alpha(T)$.

Ainsi, les éléments de $Z^2/\mathfrak{N}_E$ sont des intervalles de Z^2 par rapport

(1) si $\leq$ est un préordre (large) d'un ensemble A , $a' < a''$ ($a', a'' \in A$) signifie que l'on a $a' \leq a''$ sans avoir $a'' \leq a'$.

au préordre $\leq_E [(5.2.1)]$, ce qui prouve que $T = (t_1, t_2) \longrightarrow h_\alpha(T)$ est un homomorphisme croissant de Z^2 sur $\mathcal{H}_\alpha$, donc un homomorphisme de leurs structures d'ordre.

Le sous-groupe $\mathfrak{P}_E$ des périodes de E , qui est celui des $T \sim \dot{0}$ est un sous-groupe de Π , et on a vu, plus haut, que $\Pi = \mathfrak{P}_E = (P_0)$ si $\text{Ep}(E) < 1$; et $\Pi = \mathfrak{P}_E = \{\dot{0}\}$, si α est irrationnel. Mais si $\text{Ep}(E) = 1$ et α est rationnel, on a $\Pi = (P_0)$ et $\mathfrak{P}_E = \{\dot{0}\}$ (proposition 1 précédente).

Ainsi donc, si $\text{Ep}(E) < 1$ ou si α est irrationnel, $T + \Pi \longrightarrow h_\alpha(T)$ est un isomorphisme des structures de groupes ordonnés de Z^2/Π sur $\mathcal{H}_\alpha$. Dans le premier cas, puisque $\mathcal{H}_\alpha = (d^{-1})$, le groupe Z^2/Π est engendré par une translation $T_0 = (t_{0,1}, t_{0,2})$ telle que $-\frac{n}{d} t_{0,1} + t_{0,2} = \frac{1}{d}$, c'est-à-dire, $-nt_{0,1} + dt_{0,2} = 1$. Donc $t_{0,1}$ est l'inverse (mod. d) de $-n$, et $e_2 \equiv dT_0$ (mod. Π), car $h_\alpha(e_2) = 1$.

Dans le second cas, on a $Z^2/\Pi = Z^2$, en outre $\mathcal{H}_\alpha$ est engendré par $h_\alpha(e_1) = -\alpha$ et $h_\alpha(e_2) = 1$. Dans ce deuxième cas, le rang ordinal de Z^2/Π est égal à 1.

Quand α est rationnel, $\mathfrak{P}_E$ est engendré par P_0 et $Z^2/\mathfrak{P}_E$ l'est par T_0 . Comme pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $h_\alpha(mP_0) = m h_\alpha(P_0) = 0$, on a $-T_0 < mP_0 < T_0$. Autrement dit, T_0 est infiniment grand par rapport à P_0 . Si, en plus, $\text{Ep}(E) = 1$, on a $\Pi = \{\dot{0}\}$, donc $Z^2/\Pi = Z^2$, et, en tant que groupe ordonné, est de rang ordinal 2 [ses sous-groupes isolés étant $\{\dot{0}\}$, $\mathfrak{P}_E = (P_0)$ et Z^2 , les facteurs associés étant $Z^2/\mathfrak{P}_E \simeq \mathcal{H}_\alpha = (d^{-1})$ et $\mathfrak{P}_E = (P_0)$].

La projection horizontale de P_0 de longueur d est de sens positif (sur l'axe X_1). Donc, selon que le sens de la projection horizontale de la demi-droite portant $E' = L' \cap E$ est positif ou négatif, on aura $P_0 \cdot \text{Ext } E \leq \text{Ext } E$ ou $P_0 \cdot \text{Ext } E \geq \text{Ext } E$, donc $P_0 > \dot{0}$ ou $P_0 < \dot{0}$. Cela achève la démonstration de la proposition.

Définition : Soient $E \subseteq \mathbb{Z}^2$ une hypersurface indéfinie limite de préévaluation, α la direction de minceur de E et L' la α -tangente inférieure de E . On dit que E est de type positif (resp. négatif) si E n'est pas périodique (c'est-à-dire $E_p(E) = 1$) et le demi-drapeau minimal de L' , dont le support contient $E \cap L'$ [(5.7.3)], est une demi-droite orientée vers les abscisses positives (resp. négatives).

On dira que E est spéciale si $E' = L' \cap E \neq \emptyset$.

Remarque 2. Avec les notations de la définition précédente, si α est rationnel, E est spéciale (cela résulte du lemme 2 précédent).

(6.1.4) Soient $E \subseteq \mathbb{Z}^2$ une hypersurface indéfinie limite de préévaluation qui, de plus, est spéciale, α la direction de minceur de E , L' la α -tangente inférieure de E et $E' = E \cap L'$. On peut toujours traduire E de manière qu'un point quelconque $P \in E'$ vienne au point $\dot{O}$. Si E est périodique, il est clair que le résultat de la translation précédente ne dépend pas du choix du point $P \in E'$. Dans tous les autres cas, on supposera, sauf mention expresse du contraire, que P est le point extrême de E' , c'est-à-dire tel que l'un des points $P - P_0$, $P + P_0$ ne soit pas dans E . Une hypersurface indéfinie limite de préévaluation et spéciale traduite de cette manière est dite en position canonique.

Remarque. Rappelons que l'on a $-1 \leq \alpha < 0$. Cela étant,

(a) si α est irrationnel, il n'y a qu'une seule hypersurface indéfinie limite de préévaluation en position canonique E_α , à savoir, celle qui est l'ensemble des points entiers de la bande $[L'_\alpha, L'_\alpha + e_2[$, où L'_α désigne la droite d'équation $-\alpha x_1 + x_2 = 0$

(b) si α est rationnel tel que $\alpha > -1$, il y a 3 hypersurfaces indéfinies limites de préévaluation en position canonique :

1° la périodique E_α^0 , qui est encore l'ensemble des points entiers $\in [L'_\alpha, L'_\alpha + e_2[$

2° l'apériodique positive E_{α}^{+} , qui est l'ensemble des points entiers $P = (p_1, p_2)$ qui, ou bien appartiennent à L'_{α} et tels que $p_1 \geq 0$, ou bien, appartiennent à $]L'_{\alpha}, L'_{\alpha} + e_2[$, ou bien, enfin, appartiennent à $L'_{\alpha} + e_2$ et tels que $p_1 < 0$

3° l'apériodique négative E_{α}^{-} , qui est l'ensemble des points entiers $P = (p_1, p_2)$ qui, ou bien, appartiennent à L'_{α} et tels que $p_1 \leq 0$, ou bien, appartiennent à $]L'_{\alpha}, L'_{\alpha} + e_2[$, ou bien enfin, appartiennent à $L'_{\alpha} + e_2$ et tels que $p_1 > 0$ (L'_{α} désigne encore la droite d'équation $-\alpha x_1 + x_2 = 0$).

(c) si $\alpha = -1$, seules E_{-1}° et E_{-1}^{-} sont des hypersurfaces indéfinies limites de préévaluation en position canonique, car E_{-1}^{+} n'est même pas une hypersurface indéfinie limite

(d) les hypersurfaces indéfinies limites de préévaluation spéciales et en position canonique E se caractérisent parmi toutes les hypersurfaces indéfinies limites de préévaluation par les conditions suivantes :

$$1^{\circ} \dot{0} \in E$$

2° Si $P \in E$, la translation $T = P$ qui amène le point $\dot{0}$ en P est toujours $\geq \dot{0}$ (pour le préordre défini par E sur les translations de Z^2).

Démonstration des remarques (a), (b) et (c).

On sait déjà [remarque (6.1.1)] qu'une hypersurface indéfinie limite $E \subseteq Z^2$ est de préévaluation ayant α pour sa direction de minceur, si et seulement si, pour α irrationnel, elle est de la forme E_{α} et pour α rationnel, d'une des formes E_{α}° , E_{α}^{-} , E_{α}^{+} . Donc un tel ensemble de points (qui est nécessairement d'épaisseur finie et dont la direction de minceur est bien α), s'il est une hypersurface indéfinie limite, est de préévaluation. Par conséquent, pour prouver les remarques (a), (b) et (c), il suffit de montrer que les conditions 1° et 2° [(6.1) (A)] sont satisfaites pour l'ensemble considéré. Or, il est clair, par sa définition, que la condition 1° (existence de la fonction $j : Z \rightarrow Z$) est satisfaite pour cet ensemble.

Montrons que la condition 2° est aussi satisfaite pour cet ensemble quand il est différent de E_{-1}^+ .

Il s'agit, si $j : Z \rightarrow Z$ est la fonction existante d'après 1°, de prouver que l'on a : $0 \leq j(n) - j(n+1) \leq 1$ pour tout $n \in Z$. Si $-1 < \alpha < 0$, on a : $\alpha n \leq j(n) < \alpha n + 1$ et $\alpha(n+1) \leq j(n+1) < \alpha(n+1) + 1$, ce qui implique $-(1+\alpha) < j(n) - j(n+1) < 1-\alpha$. Donc $-1 < j(n) - j(n+1) < 2$. Comme $j(n) - j(n+1)$ est un entier, on a en fait, $0 \leq j(n) - j(n+1) \leq 1$ pour tout $n \in Z$, c'est-à-dire la condition 2° est aussi satisfaite.

Donc, si $-1 < \alpha < 0$ (ce qui est le cas si α est irrationnel et tel que $-1 \leq \alpha < 0$), E_α avec α irrationnel, ainsi que E_α^0 , E_α^- et E_α^+ quand α est rationnel, sont des hypersurfaces indéfinies limites, donc de préévaluation.

Considérons le cas $\alpha = -1$. Si j_{-1}^0 , j_{-1}^- et j_{-1}^+ sont les fonctions associées aux ensembles E_{-1}^0 , E_{-1}^- et E_{-1}^+ , on a $j_{-1}^0(n) = -n$; $j_{-1}^-(n) = -n$ ou $-n + 1$ selon que $n \leq 0$ ou $n > 0$ et $j_{-1}^+(n) = -n + 1$ ou $-n$ selon que $n < 0$ ou $x_1 \geq 0$. Cela montre que

$$j_{-1}^0(n) - j_{-1}^0(n+1) = 1$$

$$j_{-1}^-(n) - j_{-1}^-(n+1) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \neq -1 \\ 0 & \text{si } n = -1 \end{cases}$$

Donc, E_{-1}^0 et E_{-1}^- sont bien des hypersurfaces indéfinies limites. Par contre

$$j_{-1}^+(-1) - j_{-1}^+(0) = 2 - 0 = 2 > 1,$$

ce qui prouve que E_{-1}^+ n'est pas une hypersurface indéfinie limite [si l'on échange les axes X_1 et X_2 et si l'on ajoute à E_{-1}^+ le point $(0,1)$ l'ensemble ainsi obtenu devient une hypersurface indéfinie limite (d'ailleurs de préévaluation) par rapport au nouveau système d'axes].

Démonstration de la remarque (d) :

Si $P \notin E' = E \cap L'_\alpha$, on a $h_\alpha(T) = h_\alpha(P) > 0$, donc $T > \dot{O}$. Et si $P \in E'$, ou bien T est une période (dans ce cas $E = E^0_\alpha$), ou bien le sens de T est le même que celui de la demi-droite D' de L'_α d'origine $\dot{O}$ qui contient E' . Par suite $-T \notin E$, mais la translatée par T de $-T$ est $\dot{O} \in E$. Donc $T.E$ est contenu dans $\text{ext}.E$.

D'autre part, si $\dot{O} \in E$ mais E n'est pas spéciale et en position canonique (car si $\dot{O} \notin E$, elle ne l'est sûrement pas), ou bien $h(L'_\alpha) < 0$, dans ce cas, il existe des $P \in E$ tels que $h_\alpha(P) < 0$, donc la translation $T : \dot{O} \rightarrow P$ est telle que $h_\alpha < 0$; ou bien $h(L'_\alpha) = 0$ mais E n'est pas périodique et les deux points $P_0 = (d, n)$ et $-P_0$ appartiennent à E . Mais alors l'une des translations $\dot{O} \rightarrow P_0$, $\dot{O} \rightarrow -P_0$ est strictement négative (car E n'est pas périodique). Cela achève la démonstration de la remarque (d).

§ (6.2) - FRACTIONS NEGACONTINUES ET LEURS APPLICATIONS.

D'après le début de (6.1.3), les hypersurfaces indéfinies limites de préévaluation spéciales sont des translatées de celles en position canonique, et comme on le verra plus tard, la connaissance explicite des hypersurfaces indéfinies de préévaluation spéciales suffit pour décrire, à une translation près, les hypersurfaces indéfinies limites de préévaluation quelconques, donc, d'après un résultat que l'on prouvera aussi plus tard, tous les sous-ensembles de N^2 de type ML et de préévaluation (on verra d'ailleurs que la connaissance des seules hypersurfaces indéfinies limites de préévaluation périodiques est suffisante pour cela).

La détermination directe du graphe de la fonction j associée à une hypersurface indéfinie limite de préévaluation spéciale en position canonique à partir de leur définition [début de (6.1)] est assez malaisée.

Mais on arrive à le déterminer explicitement par une méthode indirecte, dont voici l'idée sommaire : On définit une certaine classe de courbes polygonales infinies de $\mathbb{R}^2$ telles que l'ensemble de leurs points entiers soit une hypersurface indéfinie limite. Les courbes de la classe considérée dépendent d'un certain système (d'ailleurs infini en général) de paramètres, et on montre comment s'exprime, à partir de ces paramètres, la direction de minceur α de la courbe si son épaisseur est finie.

En se servant du fait que les translatées d'une hypersurface indéfinie limite de préévaluation ne se traversent pas, on montre que toute hypersurface indéfinie limite de préévaluation est l'ensemble des points entiers d'une courbe de la classe considérée. On constate ensuite que si α est rationnel et tel que $-1 < \alpha < 0$, il y a juste 3 courbes distinctes de cette classe qui peuvent avoir la direction de minceur α , et que pour $\alpha = -1$, il y en a deux. Mais cela prouve, compte tenu des remarques (a), (b) et (c) de (6.1.3), que l'ensemble des points entiers de ces courbes sont des hypersurfaces indéfinies limites de préévaluation [et, par conséquent, sont d'épaisseur finie ≤ 1 et leur direction de minceur est α]. Quant aux autres courbes de la classe considérée, on montre que toute partie finie d'une telle courbe est égale à une partie finie d'une courbe convenable de la classe dont la direction de minceur est rationnelle. Ainsi, si des translatées entières de l'ensemble des points entiers de la courbe considérée se traversaient, il en serait de même pour une courbe de la classe dont la direction de minceur est rationnelle.

Mais cela est impossible, d'après ce qui précède. On démontre ainsi que les ensembles de points entiers des courbes de la classe considérée coïncident avec les hypersurfaces indéfinies limites de préévaluation dans $\mathbb{Z}^2$. Comme la forme des courbes de cette classe est donnée explicitement, on en déduit explicitement toutes les fonctions $j : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ possibles associées aux

hypersurfaces indéfinies limites de préévaluation dans Z^2 .

(6.2.1) Soient $E \subseteq Z^2$ une hypersurface indéfinie limite de préévaluation spéciale, α sa direction de minceur et L_α la droite de pente α passant par $\dot{O}$. Alors, si $P = (p_1, p_2)$ est un point différent de $\dot{O}$ et appartenant à E_α (si α est irrationnel) ou à l'une des courbes $E_\alpha^0, E_\alpha^+, E_\alpha^-$ (si α est rationnel), on a

$0 \leq -\alpha p_1 + p_2 \leq 1$, c'est-à-dire, $0 \leq -\alpha + \frac{p_2}{p_1} \leq 1$. Si P parcourt une suite de points $P^{(1)}, P^{(2)}, \dots, P^{(i)} = (p_1^{(i)}, p_2^{(i)})$, ..., tous différents de $\dot{O}$, de l'un des sous-ensembles considérés plus haut, on aura $|p_1^{(i)}| \rightarrow +\infty$, donc

$$-\alpha + \frac{p_2^{(i)}}{p_1^{(i)}} \rightarrow 0, \text{ donc } \alpha = \lim_{i \rightarrow +\infty} \frac{p_2^{(i)}}{p_1^{(i)}}. \text{ Ainsi,}$$

une infinité de points d'une hypersurface indéfinie limite de préévaluation spéciale E détermine sa direction de minceur α (cela est vrai, d'ailleurs, aussi pour les E non-spéciales).

On sait que l'on peut obtenir une suite $P^{(i)}$ de points de E qui se rapprochent de plus en plus de la droite L_α (ou, plus précisément, de sa demi-droite L_α^+ "positive", c'est-à-dire, formée de ses points d'abscisses strictement positives) en développant α en fraction continue et en prenant $P^{(i)} = (a_i, h_i)$, où $\frac{h_i}{a_i}$ est la "i-ième réduite" de ce développement. En effet, on a, à partir

$$\text{d'un certain rang, } \left| \alpha - \frac{h_i}{a_i} \right| \leq \frac{2}{a_i} < 1.$$

Mais les $P^{(i)}$ ainsi déterminés sont successivement au-dessus et au-dessous de L_α , tandis qu'il nous faut des points suffisamment proches de L_α et situés au-dessus de L_α .

Bien que l'on aurait pu prendre ceux des points précédents situés au-dessus (ou sur) L_α , il se trouve qu'une méthode légèrement différente est préférable ; elle donne directement les points entiers qui approchent L_α^+ et qui sont tous au-dessus ou sur cette demi-droite.

(6.2.2) On conserve les données et les notations de (6.2.1). Considérons le développement (fini ou infini) suivant :

$$(1) \quad \alpha = d_0 - \frac{1}{d_1 - \frac{1}{d_2 - \frac{1}{d_3 - \dots - \frac{1}{d_i - \dots}}}}$$

où les d_i sont des entiers tels que $d_i \geq 2$ si $i > 0$, sans que l'on ait $d_i = 2$ à partir d'un certain rang.

Un développement du type précédent est dit une fraction négacontinue, et tout d_i qui y figure en est dit le i -ième quotient.

Lemme. Tout nombre réel α possède un développement unique en une fraction négacontinue.

En effet, supposons que l'on a déjà mis α sous la forme

$$\alpha = d_0 - \frac{1}{d_1 - \frac{1}{d_2 - \dots - \frac{1}{d_{i-1} - \frac{1}{\alpha_i}}}}$$

où α_i est un réel tel que $\alpha_i > 1$, les d_k ($k = 0, 1, \dots, i-1$) étant des entiers $d_k \geq 2$ si $k > 0$.

Soit d_i le plus petit entier tel que $d_i \geq \alpha_i$. Alors, ou bien $d_i = \alpha_i$, auquel cas $d_i \geq 2$ (car $\alpha_i > 1$), donc le développement précédent est déjà le développement complet de α en fraction négacontinue. Sinon, on a

$-1 < \alpha_i - d_i < 0$, donc si l'on pose $\alpha_{i+1} = \frac{-1}{\alpha_i - d_i}$, on a $\alpha_{i+1} > 1$ et

$$\alpha_i = d_i - \frac{1}{\alpha_{i+1}}, \text{ donc}$$

$$\alpha = d_0 - \frac{1}{d_1 - \frac{1}{d_2 - \dots - \frac{1}{d_{i-1} - \frac{1}{d_i - \frac{1}{\alpha_{i+1}}}}}}$$

est un développement partiel de même type que le précédent, mais comportant un terme de plus. Par itération du procédé précédent, on obtient soit un développement fini égal à α , soit un développement infini, dont on montre que la suite des développements partiels correspondants converge vers α .

Montrons d'abord qu'il n'est pas possible que, dans le développement ainsi obtenu, l'on ait constamment $d_i = 2$ à partir d'un certain rang i_0 . En effet, il faudrait pour cela que pour tout $i \geq i_0$, on ait $1 < \alpha_i < 2$. Posons

$u_i = 2 - \alpha_i$, $u'_i = 2 - \alpha_{i+1} = u_{i+1}$. Comme $d_i = 2$, on a

$$u_i = 2 - \alpha_i = d_i - \alpha_i = \frac{1}{\alpha_{i+1}} = \frac{1}{2 - u'_i}, \text{ donc } (2 - u'_i)u_i = 1 \text{ et } u'_i = \frac{2u_i - 1}{u_i},$$

$$\text{donc, } u_i - u'_i = \frac{u_i^2 - (2u_i - 1)}{u_i} = \frac{(1 - u_i)^2}{u_i}. \text{ Cela prouve, si } 0 < u_i < 1, \text{ que}$$

$u'_i < u_i$ et que $u_i - u'_i$ est une fonction strictement décroissante de u_i . Il en résulte que, si $u_i = 2 - \alpha_i$ et $d_i = d_{i+1} = \dots = d_{i+s} = 2$, l'on a $0 < u_{i+j} < 1$

(où $0 \leq j \leq s$), $u_i > u_{i+1} > \dots > u_{i+s} > u_{i+s+1}$ et

$$u_{i+j} - u_{i+j+1} = \frac{(1 - u_{i+j})^2}{u_{i+j}} \geq \frac{(1 - u_i)^2}{u_i}, \text{ donc } u_i - u_{i+s+1} \geq s \frac{(1 - u_i)^2}{u_i}$$

$$\left[\text{car, pour tout } j = 0, 1, \dots, s, \text{ on a } u_{i+j} - u_{i+j+1} = \frac{(1 - u_{i+j})^2}{u_{i+j}} \geq \frac{(1 - u_i)^2}{u_i} \right]$$

Donc, pour un s suffisamment grand, on aura $u_i - u_{i+s+1} \geq u_i$, ce qui implique

$$2 - \alpha_{i+s+1} = u_{i+s+1} \leq 0, \text{ et } \alpha_{i+s+1} \geq 2, \text{ donc } d_{i+s+1} > 2 \text{ ou } \alpha_{i+s+1} = 2$$

auquel cas $d_{i+s+1} = 2 = \alpha_{i+s+1}$ et α possède un développement fini en fraction négacontinue.

Pour montrer la convergence des développements partiels, considérons la suite de variables réelles $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$ et soit

$$(2) \quad y_i = \frac{-1}{x_1 - \frac{1}{x_2 - \dots - \frac{1}{x_i}}}$$

Alors, on peut représenter y_i sous la forme

$$(3) \quad \frac{H_i(x_1, \dots, x_i)}{A_i(x_1, \dots, x_i)}$$

où H_i et A_i sont deux polynômes par rapport aux variables $x_1, x_2, \dots, x_i$, à coefficients dans Z et premier entre eux dans $Z[x_1, \dots, x_i]$.

Montrons que l'on peut poser :

$$(4) \quad H_i(x_1, \dots, x_i) = H_{i-1}(x_1, \dots, x_{i-1})x_i - H_{i-2}(x_1, \dots, x_{i-2})$$

$$(5) \quad A_i(x_1, \dots, x_i) = A_{i-1}(x_1, \dots, x_{i-1})x_i - A_{i-2}(x_1, \dots, x_{i-2})$$

où on a $y_1 = \frac{-1}{x_1}$, donc $H_1(x_1) = -1$ et $A_1(x_1) = x_1$

$$y_2 = \frac{-1}{x_1 - \frac{1}{x_2}} = \frac{-x_2}{x_1 x_2 - 1}, \text{ donc } H_2(x_1, x_2) = -x_2 \text{ et } A_2(x_1, x_2) = x_1 x_2 - 1.$$

Ce qui serait en accord avec les formules (4) et (5) à condition de convenir que $H_0 = 0$, et que $A_0 = 1$.

Supposons $i \geq 2$. Alors, avec la convention $H_0 = 0$, $A_0 = 1$, on a

$$\begin{aligned}
 y_{i+1} &= \frac{H_i \left(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i - \frac{1}{x_{i+1}} \right)}{A_i \left(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i - \frac{1}{x_{i+1}} \right)} = \\
 &= \frac{H_{i-1}(x_1, \dots, x_{i-1}) \frac{x_i x_{i+1} - 1}{x_{i+1}} - H_{i-2}(x_1, \dots, x_{i-2})}{A_{i-1}(x_1, \dots, x_{i-1}) \frac{x_i x_{i+1} - 1}{x_{i+1}} - A_{i-2}(x_1, \dots, x_{i-2})} = \\
 &= \frac{x_{i+1} [H_{i-1}(x_1, \dots, x_{i-1}) x_i - H_{i-2}(x_1, \dots, x_{i-2})] - H_{i-1}(x_1, \dots, x_{i-1})}{x_{i+1} [A_{i-1}(x_1, \dots, x_{i-1}) x_i - A_{i-2}(x_1, \dots, x_{i-2})] - A_{i-1}(x_1, \dots, x_{i-1})} = \\
 &= \frac{H_i(x_1, \dots, x_i) x_{i+1} - H_{i-1}(x_1, \dots, x_{i-1})}{A_i(x_1, \dots, x_i) x_{i+1} - A_{i-1}(x_1, \dots, x_{i-1})}, \text{ ce que l'on veut.}
 \end{aligned}$$

Cela montre que, si les y_k ($k = 0, 1, \dots, i$) se mettent sous la forme (3), y_{i+1} se met aussi sous la même forme si l'on choisit convenablement sa représentation sous forme de fraction rationnelle ⁽¹⁾. On a, en particulier

$$\begin{vmatrix} H_{i+1} & H_i \\ A_{i+1} & A_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -H_{i-1} & H_i \\ -A_{i-1} & A_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} H_i & H_{i-1} \\ A_i & A_{i-1} \end{vmatrix}, \text{ donc, par induction, on aura :}$$

$$(6) \quad \begin{vmatrix} H_{i+1} & H_i \\ A_{i+1} & A_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} H_1 & H_0 \\ A_1 & A_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ x_1 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

(1) On pouvait obtenir les formules précédentes à partir des formules analogues pour les fractions continues habituelles. Car, si l'on pose $x_i' = (-1)^i x_i$, dans le développement (2), les x_i sont remplacés par les x_i' et les signes - en signes +. Mais le développement (1) de α en fraction négacontinue ne deviendrait pas, par ce changement de variables, son développement en fraction continue, car les $d_i' = (-1)^d d_i$ ne satisfont pas à l'inégalité habituelle $d_i' \geq 1$.

L'égalité $\begin{vmatrix} H_{i+1} & H_i \\ A_{i+1} & A_i \end{vmatrix} = -1$ montre que, si on donne aux variables

réelles $x_1, \dots, x_i$ des valeurs entières, les valeurs de H_i et A_i correspondantes
sont des entiers premiers entre eux. Montrons que l'on a la propriété suivante :

(7) Si $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$ sont tous ≥ 2 et si $x_i \geq 1$, y_i est une fonction
croissante de x_i telle que $-1 \leq y_i \leq 0$.

Supposons la propriété (7) vraie pour $i-1$ et posons $z_{i-1} = x_{i-1} - \frac{1}{x_i}$.

Pour $x_1, x_2, \dots, x_{i-1}$ fixées, z_{i-1} est une fonction croissante de x_i . Comme,
par hypothèse, $x_i \geq 1$ et $x_{i-1} \geq 2$, on a $z_{i-1} \geq 2 - \frac{1}{1} = 1$. Donc, les valeurs
des variables $x_1, x_2, \dots, x_{i-2}, z_{i-1}$ satisfont aux hypothèses de (7) quand on
y remplace i par $i-1$, ce qui prouve que la propriété (7) est vraie pour i si
elle est vraie pour $i-1$. Et si $i = 1$, on a $y_i = \frac{-1}{x_1}$ pour laquelle la proposition
(4) est évidente. Cela achève la démonstration de (7).

Par ailleurs, si toutes les variables $x_1, \dots, x_i$ sont ≥ 2 , on a
 $-1 < y_i$, car y_i ne peut prendre son minimum que pour $x_1 = x_2 = \dots = x_{i-1} = 2$
et $x_i = 1$. Il en résulte, en particulier, que

$$(8) \quad \text{si } y = \frac{-1}{x_1 - \frac{1}{x_2 - \frac{1}{x_3 - \dots - \frac{1}{x_i} \dots}}}$$

est un symbole dépendant d'une infinité de variables réelles $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$
telles que $x_1 \geq 2, x_2 \geq 2, \dots, x_i \geq 2$, la suite

$$y_1, y_2, \dots, y_i, \dots$$

où y_i est défini par (2) précédent, converge.

En effet,

$$y_i = \frac{-1}{x_1 - \frac{1}{x_2 - \frac{1}{\ddots - \frac{1}{z_{i,j}}}}}$$

$$\text{où } z_{i,j} = x_i - \frac{1}{x_{i+1} - \frac{1}{\ddots - \frac{1}{x_j}}}$$

Les variables $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$ étant telles que $x_1 \geq 2, x_2 \geq 2, \dots, x_i \geq 2, \dots$ on a, en vertu de ce qui précède (7), l'inégalité $x_{i-1} < z_{i,j} < x_i$. Donc, d'après ce qui précède,

$$\begin{aligned} & \frac{H_{i-1}(x_1, \dots, x_{i-1}) (x_{i-1}) - H_{i-2}(x_1, \dots, x_{i-2})}{A_{i-1}(x_1, \dots, x_{i-1}) (x_{i-1}) - A_{i-2}(x_1, \dots, x_{i-2})} < y_j < \\ & < \frac{H_{i-1}(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}) x_i - H_{i-2}(x_1, x_2, \dots, x_{i-2})}{A_{i-1}(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}) x_i - A_{i-2}(x_1, x_2, \dots, x_{i-2})} = y_i. \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} (9) \quad 0 < y_i - y_j & < \frac{- \begin{vmatrix} H_i & H_{i-1} \\ A_i & A_{i-1} \end{vmatrix}}{A_i(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}) A_{i-1}(x_1, x_2, \dots, x_i)} = \\ & = \frac{1}{A_i(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}) A_{i-1}(x_1, x_2, \dots, x_i)} \quad [(5)]. \end{aligned}$$

Montrons que, compte tenu des conditions imposées aux valeurs des variables $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$, le produit $A_i(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i-1}) A_{i-1}(x_1, x_2, \dots, x_i)$ tend vers $+\infty$ quand $i \rightarrow +\infty$, ce qui prouvera que la suite $y_1, y_2, \dots, y_i, \dots$ est une suite de Cauchy.

Prouvons, d'abord, que $A_i(x_1, x_2, \dots, x_i) > 0$. Cela est vrai pour $A_0 = 1$ et $A_1(x_1) = x_1 \geq 2$. Supposons que cela soit vrai pour tout $A_j(x_1, x_2, \dots, x_j)$ tel que $j < i$.

Alors, $A_i(x_1, x_2, \dots, x_i) = A_{i-1}(x_1, x_2, \dots, x_{i-1})x_i - A_{i-2}(x_1, x_2, \dots, x_{i-2}) \geq 2 A_{i-1}(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}) - A_{i-2}(x_1, x_2, \dots, x_{i-2})$, ce qui implique, si $\Delta_i = A_i(x_1, x_2, \dots, x_i) - A_{i-1}(x_1, x_2, \dots, x_{i-1})$, $\Delta_i \geq \Delta_{i-1}$. Donc, $\Delta_1 \leq \Delta_2 \leq \dots \leq \Delta_i$, ce qui implique $A_i(x_1, x_2, \dots, x_i) = A_0 + \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_i \geq A_0 + i \Delta_1 \geq 1 + i(2-1) \geq i + 1$.

D'autre part $A_i(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i-1) = A_i(x_1, x_2, \dots, x_i) - A_{i-1}(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}) = \Delta_i \geq \Delta_1 = 1$. Cela montre, compte tenu de ce qui précède, que $A_i(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i-1)A_i(x_1, x_2, \dots, x_i) \geq i + 1$, qui tend vers $+\infty$.

Par conséquent, la suite $y_1, y_2, \dots, y_i, \dots$ est convergente. Si $y = \lim_{i \rightarrow +\infty} y_i$, on a, en passant à la limite, quand $j \rightarrow +\infty$, dans l'inégalité (9),

$$0 \leq y_i - y \leq \frac{1}{A_i(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i-1)A_i(x_1, x_2, \dots, x_i)} \leq \frac{1}{A_i(x_1, x_2, \dots, x_i)},$$

donc

$$(10) \quad 0 \leq H_i(x_1, x_2, \dots, x_i) - y A_i(x_1, x_2, \dots, x_i) \leq 1,$$

et, d'une manière plus précise (compte tenu de $\Delta_1 = 1$),

$$(11) \quad 0 \leq H_i(x_1, x_2, \dots, x_i) - y A_i(x_1, x_2, \dots, x_i) \leq \frac{1}{(x_i-2)A_{i-1}(x_1, x_2, \dots, x_{i-1})+1}$$

(12) Par ailleurs, si $x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$ sont des entiers et si y est

irrationnel, on ne peut pas avoir $y_i - y = \frac{1}{A_i(x_1, x_2, \dots, x_i)}$, donc la

deuxième inégalité de (10) est stricte.

Revenons au développement (1) (fini ou infini) et supposons que

$$\alpha_i = d_0 - \frac{1}{d_1 - \frac{1}{d_2 - \dots - \frac{1}{d_i}}}$$

n'est pas encore (dans le cas fini) tout le développement de α . Alors, comme on a exclu le cas où d_i devient stationnaire et égal à 2 à partir d'un certain rang, on a $d_i - 1 < d_i - \frac{1}{d_{i+1}} < d_i$, ce qui implique

$$\frac{H_i(d_1, d_2, \dots, d_{i-1}, d_i - 1)}{A_i(d_1, d_2, \dots, d_{i-1}, d_i - 1)} < \alpha - d_0 < \frac{H_i(d_1, d_2, \dots, d_{i-1}, d_i)}{A_i(d_1, d_2, \dots, d_{i-1}, d_i)}$$

Ce qui montre que

$$-\frac{1}{d_1 - \frac{1}{d_2 - \dots - \frac{1}{d_i}}}$$

a comme limite $\alpha - d_0$ si ce développement est infini et est égal à $\alpha - d_0$ s'il est fini (car, s'il s'arrête à l'indice j , on a $z_j = d_j$). Cela achève la démonstration du lemme.

Remarque. Avec les données et les notations précédentes, si d_i est un entier > 2 , on a

$$A_i(d_1, d_2, \dots, d_{i-1}, d_i - 1) = A_{i-1}(d_1, d_2, \dots, d_{i-1})(d_i - 1) - A_{i-2}(d_1, d_2, \dots, d_{i-1}) \geq \\ \geq A_{i-1}(d_1, d_2, \dots, d_{i-1})(d_i - 2) \geq A_{i-1}(d_1, d_2, \dots, d_{i-1}).$$

Donc, si le développement précédent est infini, l'hypothèse

" d_i n'est pas stationnaire et égal à 2" montre que $A_i(d_1, d_2, \dots, d_{i-1}, d_i - 1) \rightarrow +\infty$ quand $i \rightarrow +\infty$. Cela montre que, dans ce cas, α ne peut pas être rationnel.

En effet, on a

$$0 < \frac{H_i(d_1, d_2, \dots, d_i)}{A_i(d_1, d_2, \dots, d_i)} - (\alpha - d_0) < \frac{1}{A_i(d_1, d_2, \dots, d_{i-1}, d_{i-1}) A_i(d_1, d_2, \dots, d_i)} \leq \\ \leq \frac{1}{A_{i-1}(d_1, d_2, \dots, d_{i-1}) A_i(d_1, d_2, \dots, d_i)}.$$

Or, si α est rationnel, soit d son dénominateur. Si $\frac{H_i(d_1, d_2, \dots, d_i)}{A_i(d_1, d_2, \dots, d_i)} - (\alpha - d_0)$ n'est pas nul, son dénominateur est au plus égal à $A_i(d_1, d_2, \dots, d_i)d$ (les rationnels sont considérés sous leurs formes irréductibles). Ainsi, si la différence précédente est positive, elle est au moins égale à $\frac{1}{d A_i(d_1, d_2, \dots, d_{i-1})}$, d'où il résulte que $A_{i-1}(d_1, d_2, \dots, d_{i-1}) \leq d$, ce qui contredit le fait que $A_{i-1}(d_1, d_2, \dots, d_{i-1}) \rightarrow +\infty$ quand $i \rightarrow +\infty$.

(6.2.3) Supposons que $d_0, d_1, d_2, \dots, d_i, \dots$ sont des entiers en nombre fini ou infini tels que $d_i \geq 2$ pour tout $i > 0$ sans que, dans le cas infini, l'on ait $d_i = 2$ à partir d'un certain rang i_0 . Considérons le développement

$$d_0 - \frac{1}{d_1 - \frac{1}{d_2 - \dots - \frac{1}{d_i - \frac{1}{d_{i+1} - \dots}}}}$$

(qui ne s'arrête pas au rang i). On a vu, au cours de la démonstration du

lemme précédent (6.2.2), que le développement $\frac{1}{d_{i+1} - \frac{1}{d_{i+2} - \dots}}$

converge vers (resp. est égal à) un nombre réel ξ'_{i+1} tel que $-1 < \xi'_{i+1} < 0$, s'il est infini (resp. fini). Donc le développement total considéré converge vers (resp. est égal à)

$$\xi = d_0 - \frac{1}{d_1 - \frac{1}{d_2 - \dots - \frac{1}{d_i}}}$$

où $\xi_i = d_i + \xi'_{i+1}$ est tel que $d_{i-1} < \xi_i < d_i$, autrement dit $\xi_i < d_i < \xi_i + 1$.

Par contre, si d_i est le dernier terme du développement considéré, supposé fini, on a encore les inégalités $\xi_i \leq d_i < \xi_i + 1$ avec $\xi_i = d_i$. On voit donc que le développement précédent coïncide avec celui de ξ en fraction négacontinue. Il en résulte, en particulier, que si $d'_0, d'_1, d'_2, \dots, d'_i, \dots$ sont les i -ièmes quotients d'un autre développement de la forme précédente, il suffit que, pour un seul indice i , on ait $d'_i \neq d_i$ pour que la limite ξ' de ce second développement soit différente de celle ξ du premier. Cela permet, compte tenu de (6.2.2), d'énoncer le résultat suivant :

Théorème.

(a) Tout nombre réel ξ admet un développement et un seul en une fraction négacontinue $nc(\xi) = (d_0, d_1, \dots, d_i, \dots)$ telle que les réduites

$$r_i(\xi) = \frac{H_i(d_1, d_2, \dots, d_i)}{A_i(d_1, d_2, \dots, d_i)} \quad ((3) \text{ dans } (6.2.2)) \text{ convergent, en décroissant, vers}$$

$\xi - d_0$, en outre, ce développement est fini ou infini selon que ξ est rationnel ou irrationnel.

(b) Inversement, si $d_0, d_1, \dots, d_i, \dots$ est une suite finie ou infinie d'entiers telle que

1° $d_i \geq 2$ si $i > 0$ et

2° si la suite est infinie, il existe une infinité d'indices i tels que $d_i \neq 2$, la suite $y_1, y_2, \dots, y_i, \dots$, où pour tout $i > 0$,

$$y_i = d_0 - \frac{1}{d_1 - \dots - \frac{1}{d_i}}$$

converge vers un nombre réel ξ tel que $nc(\xi) = (d_0, d_1, d_2, \dots, d_i, \dots)$.

(c) On conserve les données et les notations de (a).

Si $-1 \leq \xi < 0$ (si $\xi = -1$, on pose $nc(\xi) = (d_0 = -1)$) et si $i > 0$, on a

$$1^\circ \quad 0 < -A_i(d_1, d_2, \dots, d_i)\xi + H_i(d_1, d_2, \dots, d_i) < \frac{1}{A_i(d_1, d_2, \dots, d_{i-1}, d_i-1)} \leq 1$$

$$2^\circ \quad \begin{vmatrix} H_{i-1}(d_1, d_2, \dots, d_{i-1}) & H_i(d_1, d_2, \dots, d_i) \\ A_{i-1}(d_1, d_2, \dots, d_{i-1}) & A_i(d_1, d_2, \dots, d_i) \end{vmatrix} = 1$$

$$3^\circ \quad 0 \leq A_i(d_1, d_2, \dots, d_{i-1}, d_i-1) < A_i(d_1, d_2, \dots, d_{i-1}, d_i)$$

et

$$A_i(d_1, d_2, \dots, d_{i-1}, d_i-1) \rightarrow +\infty \text{ quand } i \rightarrow +\infty.$$

$$4^\circ \quad -1 < \frac{H_i(d_1, d_2, \dots, d_i)}{A_i(d_1, d_2, \dots, d_i)} < 0, \text{ donc } H_i(d_1, d_2, \dots, d_i) < 0, \text{ les } H_i \text{ et les}$$

A_i étant définis par les formules de récurrence suivantes :

$$H_i(d_1, d_2, \dots, d_i) = d_i H_{i-1}(d_1, d_2, \dots, d_{i-1}) - H_{i-2}(d_1, d_2, \dots, d_{i-2})$$

$$A_i(d_1, d_2, \dots, d_i) = d_i A_{i-1}(d_1, d_2, \dots, d_{i-1}) - A_{i-2}(d_1, d_2, \dots, d_{i-2})$$

avec $H_0 = 0$, $H_1(d_1) = -1$; et $A_0 = 1$, $A_1(d_1) = d_1$.

Corollaire : Soient L' une droite de pente α , tel que $-1 \leq \alpha < 0$, passant par l'origine d'un plan cartésien, et $L'' = e_2 + L'$ la translatée de L' par e_2 . Alors si $d_1, d_2, \dots, d_i, \dots$ sont les i -ièmes quotients du développement de $-\alpha$ en fraction négacontinue et si $c_i = H_i(d_1, d_2, \dots, d_i)$, $a_i = A_i(d_1, d_2, \dots, d_i)$, tous les points $P_i = (a_i, c_i)$ du plan considéré appartiennent à la bande demi-ouverte $[L', L'']$.

Il suffit, pour démontrer ce corollaire, de prouver le résultat suivant :

Lemme. Les α -hauteurs $h_\alpha^{(i)} = h_\alpha(P_i)$ des points P_i satisfont aux inégalités

$$(1) \quad 0 < h_\alpha^{(i)} < \frac{1}{a_i - a_{i-1}}$$

et forment une suite strictement décroissante en fonction de i (si α est rationnel et si d_i est le dernier quotient de son développement en fraction négacontinue, on convient de poser $a_{i+1} = +\infty$ et de remplacer la deuxième inégalité stricte de (1) par une inégalité large, ce qui donne la valeur correcte $h_{\alpha}^{(i)} = 0$).

Supposons que α soit rationnel et que d_i ne soit pas le dernier quotient du développement de α en fraction négacontinue. On sait déjà (théorème précédent (a) et (c)) que la pente $y_i = \frac{c_i}{a_i}$ de la droite passant par $\hat{0}$ et P_i décroît avec i , et que

$$y_i - y_{i+1} = \frac{\begin{vmatrix} c_i & c_{i+1} \\ a_i & a_{i+1} \end{vmatrix}}{a_i a_{i+1}} = \frac{1}{a_i a_{i+1}}. \text{ Or, on a } h_{\alpha}(P_i) = a_i(-\alpha + y_i) =$$

$$a_i(y_i - y_{i+1}) + a_i(y_{i+1} - \alpha) = \frac{1}{a_{i+1}} + \frac{a_i}{a_{i+1}} h_{\alpha}(P_{i+1}) = \frac{1}{a_{i+1}} \left[1 + a_i h_{\alpha}(P_{i+1}) \right].$$

Par suite, $h_{\alpha}(P_i) - h_{\alpha}(P_{i+1}) = \frac{1}{a_{i+1}} \left[1 - (a_{i+1} - a_i) h_{\alpha}(P_{i+1}) \right]$. Cela montre que,

si $h_{\alpha}(P_{i+1}) < \frac{1}{a_{i+1} - a_i}$, on a $h_{\alpha}(P_i) - h_{\alpha}(P_{i+1}) > 0$; ainsi, la seconde assertion du lemme résulte de la première.

D'autre part, si l'on suppose que l'on a déjà $h_{\alpha}(P_{i+1}) < \frac{1}{a_{i+1} - a_i}$,

$$\text{on aura } h_{\alpha}(P_i) < \frac{1}{a_{i+1}} \left[1 + \frac{a_i}{a_{i+1} - a_i} \right] = \frac{1}{a_{i+1} - a_i} \leq \frac{1}{a_i - a_{i-1}}, \text{ car}$$

$$a_{i+1} - a_i = (d_{i+1}a_i - a_{i-1}) - a_i = (d_{i+1} - 2)a_i + a_i - a_{i-1} \geq a_i - a_{i-1}.$$

α étant toujours rationnel, supposons maintenant que d_i est le dernier quotient du développement de α en fraction négacontinue. Alors, il suffit de prouver les inégalités du lemme pour P_{i-1} avec $\alpha = y_i$. Or, on a

$$h_{\alpha}(P_{i-1}) = \frac{1}{a_i} < \frac{1}{a_{i-1} - a_{i-2}}, \text{ ce qui achève la démonstration du lemme dans le}$$

cas α rationnel.

Si α est irrationnel, posons $\alpha_j = y_j$. Il est clair, d'après la définition de y_j , que les points $P_i(a_i, c_i)$ pour $i \leq j$ sont les mêmes pour les droites L' et L_j' d'équations respectives $-\alpha X + Y = 0$ et $-\alpha_j X + Y = 0$. Il en résulte que, pour tout $i \leq j$, on a $0 < h_{\alpha_j}(P_i) < \frac{1}{a_i - a_{i-1}}$.

D'autre part, on a $0 < h_{\alpha}(P_i) - h_{\alpha_j}(P_i) = a_i(\alpha_j - \alpha)$. Donc, comme $\alpha_j \rightarrow \alpha$ quand $j \rightarrow +\infty$, il est clair que, quand $j \rightarrow +\infty$, $h_{\alpha_j}(P_i)$ tend, en croissant, vers $h_{\alpha}(P_i)$. On a, par conséquent,

$$0 < h_{\alpha}(P_i) \leq \frac{1}{a_i - a_{i-1}}$$

pour tout entier $i \geq 1$. Mais comme α est irrationnel et $a_i \neq 0$,

$h_{\alpha}(P_i) = -\alpha a_i + c_i$ ne peut pas être rationnel, en particulier $h_{\alpha}(P_i)$ ne peut pas être égal à $\frac{1}{a_i - a_{i-1}}$. On a donc

$$0 < h_{\alpha}(P_i) < \frac{1}{a_i - a_{i-1}}$$

ce qui achève la démonstration du lemme.

Remarque : Au cours de la démonstration précédente, on a, en fait, prouvé l'inégalité plus stricte suivante

$$0 < h_{\alpha}(P_i) < \frac{1}{a_{i+1} - a_i}.$$

§ (5.3) COURBES PARTICULIERES DE R^2 .

On se propose, dans ce paragraphe, de décrire certaines courbes polygonales, du plan euclidien R^2 , qui ne se recoupent pas (donc, sont orientables et seront, en fait, orientées). Ces courbes seront toujours des juxtapositions finies ou infinies, dans les deux sens, de certaines courbes polygonales orientées bien définies. On aura, pour cela, besoin d'un certain nombre de notations que l'on va préciser :

Soient S_1 et S_2 deux courbes orientées (c'est-à-dire des images continues de $[0, 1]$) considérées à une translation près. Alors $S_1 + S_2$ va désigner la juxtaposition (elle aussi à une translation près) de S_1 et de S_2 ,

c'est-à-dire leur réunion dans une position telle que la fin de S_1 coïncide avec l'origine de S_2 , de sorte que la courbe $S_1 + S_2$ soit aussi orientée.

Si $S_1, S_2, \dots, S_n$ est une suite finie de courbes finies orientées

$S_1 + S_2 + \dots + S_n$ ou $\sum_{i=1}^n S_i$ sera défini par la formule de récurrence

$$\sum_{i=1}^n S_i = \left(\sum_{i=1}^{n-1} S_i \right) + S_n. \text{ On définit ainsi une addition des courbes finies}$$

orientées, qui est associative.

Si l'on veut fixer une courbe (finie) orientée S , considérée à une translation près, de manière qu'elle commence au point P ou se termine au point Q , on écrira $\textcircled{P} S$ ou $S \textcircled{Q}$. Toutefois, s'il n'y a pas de risque de confusion, on écrira aussi S au lieu de $\textcircled{O} S$.

La somme de l courbes orientées finies, égales à S sera notée lS .

Le symbole

$$\sum_{i=0}^{+\infty} S_i \quad \left(\text{resp.} \quad \sum_{i=-\infty}^{+\infty} S_i \right)$$

désigne la réunion de la succession infinie $S_0, S_1, \dots, S_i, \dots$

(resp. $\dots, S_{-i}, \dots, S_{-1}, S_0, S_1, \dots, S_i, \dots$), où les S_i sont des courbes finies orientées telles que la fin de S_{i-1} (quand cette courbe existe) coïncide avec le début de S_i . Cette réunion est orientée en fonction de l'orientation de ses composantes S_i . Pour fixer une telle courbe (considérée, en principe, à une translation près), il suffira, par exemple, de fixer S_0 .

Ainsi $\textcircled{P} \sum_{i=0}^{+\infty} S_i$ signifiera que cette courbe est fixée de manière qu'elle

commence en P . Et $\sum_{i=-\infty}^{+\infty} S_i \textcircled{P}$ signifie que S_0 commence au point P . Toutefois, si

$P = \textcircled{O}$, on omettra de le mentionner.

Indiquons une autre manière de représenter certaines successions infinies de courbes finies orientées.

Soient $S_0, S_1, \dots, S_i, \dots$ une suite de courbes finies telles que, pour tout i et pour tout $j \geq i$, il existe des parties S_j^i de S_j (avec l'orientation induite par celle de S_j) qui, à une translation près, sont (en tant que courbes orientées) les mêmes que S_i .

La donnée des S_j^i précédentes définit une application $\varphi_{j,i}$ de S_i sur S_j^i . Soit $\{\varphi_{j,i}, i < j\}$ un système de telles applications. Ce système est dit injectif si, pour tout triplet (i,j,k) tel que $i \leq j \leq k$, on a $\varphi_{k,i} = \varphi_{k,j} \circ \varphi_{j,i}$. Et la limite inductive (avec l'orientation évidente) des S_i par rapport au système précédent sera une courbe S , en général, infinie. Et le système inductif précédent définit une injection canonique φ_i de S_i dans cette courbe S . Si l'on pose

$S_i = S_{-i}^i + \varphi_{i,i-1} S_{i-1} + S_i^i$, $S_0^i = S_0$ et $\varphi_i^i = \varphi_{-i}^i = \varphi_i$, la courbe S précédente peut se représenter sous la forme

$$S = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \varphi_i^i \cdot S_i^i$$

(5.3.1) Considérons les systèmes θ de la forme

$$\theta = (\Lambda, E)$$

où Λ est une suite finie ou infinie $(l_1, l_2, \dots, l_i, \dots; i < M)$ d'entiers tels que $l_i \geq 0$ sans être $= 0$ asymptotiquement (c'est-à-dire, à partir d'un certain rang), et où M est un entier positif ou $+\infty$ (donc $\Lambda = \emptyset$ si $M = 0$). Et si M est fini, E est réduit à un élément ξ qui est l'un des signes $+, 0, -$ (ξ ne prenant que la valeur 0 si $\Lambda = \emptyset$); si M est infini, E est aussi une suite infinie $(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i, \dots)$ telle que $0 \leq \xi_i \leq l_{i+1} + 1$, mais $\xi_{i+1} - \xi_i \leq l_{i+1}$ (autrement dit, $\xi_i = 0 \Rightarrow \xi_{i+1} \leq l_{i+1}$).

A tout système $\theta = (\Lambda, \Xi)$ de la forme précédente, on se propose d'associer une courbe infinie $S(\theta)$ dont le système θ sera dit système d'invariants. On montrera plus tard que les points entiers des courbes $S(\theta)$ coïncident avec les hypersurfaces indéfinies limites de préévaluation dans Z^2 .

Soit $\Lambda = (l_1, l_2, \dots, l_i, \dots; i < M \leq +\infty)$. Alors pour tout entier $n < M$, on note Λ_n la suite $(l_1, l_2, \dots, l_n)$, et on définit deux courbes $\mathfrak{L}(\Lambda_n)$ et $\mathfrak{T}_n(\Lambda_n)$ par la récurrence suivante : on note :

$$(1) \quad \mathfrak{L}_0 \text{ (resp. } \mathfrak{T}_0)$$

le vecteur e_1 (resp. $e_1 - e_2$) commençant au point $\dot{O}$. On pose

$$(2) \quad \mathfrak{L}_1(l_1) = (l_1 + 1)\mathfrak{L}_0 + \mathfrak{T}_0 \quad (\text{resp. } \mathfrak{T}_1(l_1) = l_1\mathfrak{L}_0 + \mathfrak{T}_0)$$

$$(3) \quad \mathfrak{L}_{i+1}(l_1, l_2, \dots, l_{i+1}) = (l_{i+1} + 1)\mathfrak{L}_i(l_1, l_2, \dots, l_i) + \mathfrak{T}_i(l_1, l_2, \dots, l_i)$$

et

$$(4) \quad \mathfrak{T}_{i+1}(l_1, l_2, \dots, l_{i+1}) = l_{i+1}\mathfrak{L}_i(l_1, l_2, \dots, l_i) + \mathfrak{T}_i(l_1, l_2, \dots, l_i)$$

Si aucune confusion n'est à craindre, en particulier, si l'on ne considère qu'un seul système Λ fixé, on écrira $\mathfrak{L}_n(\Lambda)$ [resp. $\mathfrak{T}_n(\Lambda)$] ou même $\mathfrak{L}_n$ (resp. $\mathfrak{T}_n$) au lieu de $\mathfrak{L}_n(\Lambda_n)$ [resp. $\mathfrak{T}_n(\Lambda_n)$] ; il en résulte une nouvelle écriture évidente des formules (3) et (4) précédentes.

(A) Si $\Lambda = (l_1, l_2, \dots, l_{M-1})$, où M est un entier positif.

On pose $\mathfrak{L}(\Lambda) = \mathfrak{L}_{M-1}(\Lambda)$ [resp. $\mathfrak{T}(\Lambda) = \mathfrak{T}_{M-1}(\Lambda)$], et

$$(5) \quad S(\Lambda, \Xi) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} S_i(\Lambda, \Xi)$$

où

$S_i(\Lambda, 0) = \mathfrak{L}(\Lambda)$ ou $\mathfrak{T}_0(\Lambda)$ selon que $\Lambda \neq \emptyset$ ou $\Lambda = \emptyset$, cela pour tout i tel que $-\infty < i < +\infty$,

$$S_i(\Lambda, +) = \mathfrak{L}(\Lambda) \text{ si } i \neq 0 \text{ et } S_0(\Lambda, +) = \mathfrak{T}(\Lambda),$$

$$S_i(\Lambda, -) = \mathfrak{T}(\Lambda) \text{ si } i \neq 0 \text{ et } S_0(\Lambda, -) = \mathfrak{L}(\Lambda).$$

Lemme 1. On conserve les données et les notations précédentes. Alors, pour tout entier $i \geq 1$, on a

$$1^\circ \mathfrak{R}_i(\Lambda) = \mathfrak{R}_0 + \mathcal{P}_1(\Lambda) + \dots + \mathcal{P}_i(\Lambda)$$

$$2^\circ \mathcal{P}_i(\Lambda) = l_i \mathfrak{R}_{i-1}(\Lambda) + \dots + l_1 \mathfrak{R}_0 + \mathcal{P}_0$$

$$3^\circ \mathfrak{R}_i(\Lambda) = l_i \mathfrak{R}_{i-1}(\Lambda) + \dots + l_1 \mathfrak{R}_0 + \mathfrak{R}_0 + \mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_1(\Lambda) + \dots + \mathcal{P}_{i-1}(\Lambda).$$

Remarquons que les formules 1° , 2° et 3° du lemme sont vraies pour $i = 0$, si l'on convient de poser $l_0 = 0$. En outre, ces formules sont aussi vraies pour $i = 1$ [cela résulte de (2) précédent]. Supposons les vraies pour $i-1$ ($i \geq 2$). On a

$$\mathfrak{R}_i = (l_i + 1)\mathfrak{R}_{i-1} + \mathcal{P}_{i-1} = \mathfrak{R}_{i-1} + (l_i \mathfrak{R}_{i-1} + \mathcal{P}_{i-1}) = \mathfrak{R}_{i-1} + \mathcal{P}_i =$$

$$= (\mathfrak{R}_0 + \mathcal{P}_1 + \dots + \mathcal{P}_{i-1}) + \mathcal{P}_i = \mathfrak{R}_0 + \mathcal{P}_1 + \dots + \mathcal{P}_i.$$

$$\mathcal{P}_i = l_i \mathfrak{R}_{i-1} + \mathcal{P}_{i-1} = l_i \mathfrak{R}_{i-1} + (l_{i-1} \mathfrak{R}_{i-2} + \dots + l_1 \mathfrak{R}_0 + \mathcal{P}_0) =$$

$$= l_i \mathfrak{R}_{i-1} + l_{i-1} \mathfrak{R}_{i-2} + \dots + l_1 \mathfrak{R}_0 + \mathcal{P}_0.$$

$$\mathfrak{R}_i = (l_i + 1)\mathfrak{R}_{i-1} + \mathcal{P}_{i-1} = l_i \mathfrak{R}_{i-1} + \mathfrak{R}_{i-1} + \mathcal{P}_{i-1} =$$

$$= l_i \mathfrak{R}_{i-1} + (l_{i-1} \mathfrak{R}_{i-2} + \dots + l_1 \mathfrak{R}_0 + \mathfrak{R}_0 + \mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_1 + \dots + \mathcal{P}_{i-2}) + \mathcal{P}_{i-1} =$$

$$= l_i \mathfrak{R}_{i-1} + l_{i-1} \mathfrak{R}_{i-2} + \dots + l_1 \mathfrak{R}_0 + \mathfrak{R}_0 + \mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_1 + \dots + \mathcal{P}_{i-2} + \mathcal{P}_{i-1}.$$

Le lemme est ainsi démontré.

Remarques 1. Il résulte, directement du lemme précédent, que

1° Si $i \geq 1$, $\mathfrak{R}_i(\Lambda)$ se termine par la courbe $\mathcal{P}_i(\Lambda)$ et plus généralement par la courbe $\mathcal{P}_1(\Lambda) + \mathcal{P}_2(\Lambda) + \dots + \mathcal{P}_i(\Lambda)$.

2° Si l'on fait coïncider les débuts des courbes $\mathfrak{R}_i(\Lambda)$ et $\mathcal{P}_i(\Lambda)$, la courbe $\mathfrak{R}_i(\Lambda) \cap \mathcal{P}_i(\Lambda)$ est égale à la suivante : $\mathcal{P}'_i(\Lambda) = l_i \mathfrak{R}_{i-1}(\Lambda) + l_{i-1} \mathfrak{R}_{i-2}(\Lambda) + \dots + l_1 \mathfrak{R}_0$ (cette courbe est réduite à un point si $i = 0$). En outre,

$$\mathcal{P}_i(\Lambda) = \mathcal{P}'_i(\Lambda) + \mathcal{P}_0 \quad \text{et} \quad \mathfrak{R}_i(\Lambda) = \mathcal{P}'_i(\Lambda) + \mathfrak{R}_0 + \mathcal{P}_1(\Lambda) + \dots + \mathcal{P}_{i-1}(\Lambda).$$

2. Si $\Lambda = (l_1, \dots, l_{M-1})$, le nombre rationnel $\alpha(\Lambda)$ tel que $-1 \leq \alpha(\Lambda) < 0$, dont les i -ièmes termes de sa représentation en fraction négacontinue sont les $l_i + 2$, est la direction de minceur de l'ensemble des points entiers $E(S)$ de la courbe $S = S(\Lambda, \xi)$, avec $\xi = 0$ ou $\xi = +$.

En effet, on a

$$S = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} S_i$$

où, si $\Lambda \neq \emptyset$, $S_i = \mathfrak{Q}(\Lambda)$ si $i \neq 0$ et $S_0 = \mathfrak{Q}(\Lambda)$ ou $\mathfrak{P}(\Lambda)$ selon que $\xi = 0$ ou $\xi = +$; si $\Lambda = \emptyset$, on a, pour tout i , $S_i = \mathfrak{P}_0$. Soit P_i ($-\infty < i < +\infty$) le point initial de S_i . Alors, si $i \neq 0$, la pente de la droite $P_i P_{i+1}$ est égale à $\alpha(\Lambda)$. Car, si $2 \leq i < M$ et si $\bar{\sigma}$ désigne la mesure de la projection orientée de la courbe σ sur une droite quelconque (en particulier, horizontale ou verticale), on a

$$\overline{\mathfrak{Q}_i(\Lambda)} = (l_i + 2)\overline{\mathfrak{Q}_{i-1}(\Lambda)} - \overline{\mathfrak{Q}_{i-2}(\Lambda)}.$$

D'autre part, si $d_1, d_2, \dots, d_i$ sont les termes du développement d'un $\alpha \in \mathbb{R}$ en fraction négacontinue, on a : $\{d_1, d_2, \dots, d_i\} = \emptyset$, si et seulement si α est entier. Donc si $-1 \leq \alpha < 0$, on a $\{d_1, \dots, d_i\} = \emptyset$ si et seulement si $\alpha = -1$.

Supposons que $\Lambda = (l_i ; i < M)$, où $M \geq 1$ et que $d_i = l_i + 2$.

Soient a_i , $\bar{a}_i$ les mesures des projections horizontales des courbes $\mathfrak{Q}(\Lambda_i)$, $\mathfrak{P}(\Lambda_i)$ respectivement, et soient b_i , $\bar{b}_i$ les mesures de leurs projections verticales. Si $M \geq 2$, on a : $a_1 = (l_1 + 1) + 1 = l_1 + 2 = d_1$, $b_1 = (l_1 + 1)0 - 1 = -1$ et, de même, $\bar{a}_1 = l_1 + 1$, $\bar{b}_1 = -1$. Si $M \geq 3$, on a $a_2 = (l_2 + 1)a_1 + \bar{a}_1 = (l_2 + 1)(l_1 + 2) + (l_1 + 1) = (l_1 + 2)(l_2 + 2) - 1 = d_1 d_2 - 1$ et $b_2 = (l_2 + 1)(-1) + (-1) = -d_2$.

Si l'on tient compte des formules (4) et (5) dans (6.2.2) et des conventions ($H_0 = 0$ et $A_0 = 1$), le calcul précédent montre que, pour $i = 1, 2$

$$b_i = H_i(d_1, \dots, d_i) \quad \text{et} \quad a_i = A_i(d_1, \dots, d_i).$$

Comme pour $i > 2$, on a : $a_i = (i-1)a_{i-1} + \bar{a}_{i-1} = (1_i+1)a_{i-1} + (a_{i-1} - a_{i-2}) =$
 $= d_i a_{i-1} - a_{i-2}$ et $b_i = (1_i+1)b_{i-1} + \bar{b}_{i-1} = d_i b_{i-1} - b_{i-2}$, on a, pour tout $i < M$,

$$b_i = H_i(d_1, \dots, d_i) \quad \text{et} \quad a_i = A_i(d_1, \dots, d_i).$$

Cela prouve que la pente de la droite $P_i P_{i+1}$ est égale à

$$\frac{b_{M-1}}{a_{M-1}} = \frac{-1}{d_1 - \frac{1}{d_2 - \frac{1}{\ddots - \frac{1}{d_{M-1}}}}} = \alpha(\Lambda)$$

Si $\Lambda = \emptyset$ (donc $\xi = 0$), le terme S_i de S est $\bigcup_0$, donc la pente de la droite $P_i P_{i+1}$ est -1 , qui est le seul nombre réel de l'intervalle $[-1, 0[$ tel que l'ensemble $\{d_1, \dots, d_i, \dots\}$ des termes de son développement en fraction négacontinue soit vide. Donc $\alpha(\Lambda)$ est bien la pente de la droite $P_i P_{i+1}$.

$$\text{Par suite, si } S^- = \sum_{i=-\infty}^{-1} S_i \text{ et } S^+ = \sum_{i=1}^{+\infty} S_i, \text{ on a}$$

$$\text{Ep}_{\alpha(\Lambda)}(S^-) = \text{Ep}_{\alpha(\Lambda)}(S^+) = \text{Ep}_{\alpha(\Lambda)}(\mathcal{Q}_{1,1-1}(\Lambda)) < +\infty.$$

Comme $S = S^- + S_0 + S^+$, où S_0 est une courbe finie, $\text{Ep}_{\alpha(\Lambda)}(S)$, et à fortiori, $\text{Ep}_{\alpha(\Lambda)}(E(S))$ est fini. Mais cela ne pouvant être vrai que pour un seul nombre réel α [lemme (5.5.5)], on a bien $\mu[E(S)] = \alpha(\Lambda)$.

3. Si $\Lambda = (1_1, \dots, 1_{M-1})$ est tel qu'il existe des $1_i \neq 0$ (donc $\Lambda \neq \emptyset$) et si $n < M$ est le plus grand entier i de cette forme, on pose

$$(a) \quad \Lambda^* = (1_1, \dots, 1_n - 1).$$

Si $\Lambda = (0, \dots, 0)$, on pose :

$$(b) \quad \Lambda^* = \emptyset.$$

Il est clair que $\alpha(\Lambda^*) < \alpha(\Lambda)$ [(5.2.2), (7)]. En outre, si $\Lambda^* \neq \emptyset$, on a

$\mathcal{Q}(\Lambda^*) = \bigcup(\Lambda)$; si $\Lambda = (0, \dots, 0)$, la courbe $S[(0, \dots, 0), -]$ est la juxtaposition

des courbes, qui sont toutes égales à $\mathcal{P}_0$ sauf une qui est égale à $\mathcal{Q}_0 + \mathcal{P}_0$. Donc

1° la direction de minceur de $S(\Lambda, -)$ est égale à $\alpha(\Lambda^*)$ si $\Lambda \neq (0, \dots, 0)$ et est égale à $-1 = \alpha(\emptyset)$ si $\Lambda = (0, \dots, 0)$.

Par conséquent,

2° si $\tilde{\Lambda} = (1_1, \dots, 1_{M-1} + 1)$, la direction de minceur de $E(S(\tilde{\Lambda}, -))$ est égale à $\alpha(\Lambda)$.

Lemme 2. Soient $\theta = [\Lambda = (1_1, 1_2, \dots, 1_{M-1}), \xi]$ et $\theta' = [\Lambda' = (1'_1, 1'_2, \dots, 1'_{M-1}), \xi']$ deux systèmes d'invariants tels que $M \leq M'$. Alors $S(\theta) = S(\theta')$ si et seulement si les conditions suivantes sont satisfaites :

$$1^\circ \xi = \xi'$$

$$2^\circ (a) \text{ si } \xi = \xi' \neq -, \text{ on a } \Lambda = \Lambda'$$

$$(b) \text{ si } \xi = \xi' = -, \text{ on a } \Lambda = \Lambda'_{M-1} \text{ et } 1'_M = 1'_{M+1} = \dots = 1'_{M'-1} = 0.$$

Soit n le plus grand entier au plus égal à $M-1$, tel que $1_n \neq 0$.

Montrons d'abord que $S(\Lambda, -) = S(\Lambda_n, -)$. En effet, si, pour un indice

$1 \leq i \leq M-1$, on a $1_i = 0$, on aura $\mathcal{P}_i(\Lambda) = \mathcal{P}_{i-1}(\Lambda)$, il en résulte que

$$\mathcal{P}(\Lambda_n) = \mathcal{P}_n(\Lambda) = \mathcal{P}_{n+1}(\Lambda) = \dots = \mathcal{P}_{M-1}(\Lambda) = \mathcal{P}(\Lambda). \text{ Mais } 1_i = 0 \text{ entraîne aussi}$$

$$\mathcal{Q}_i = \mathcal{Q}_{i-1} + \mathcal{P}_{i-1}, \text{ donc } \mathcal{Q}(\Lambda) = \mathcal{Q}_{M-1}(\Lambda) = \mathcal{Q}_n(\Lambda) + [\mathcal{P}_n(\Lambda) + \mathcal{P}_{n+1}(\Lambda) + \dots + \mathcal{P}_{M-2}(\Lambda)] =$$

$$\mathcal{Q}_n(\Lambda) + (M-n-1)\mathcal{P}_n(\Lambda). \text{ Cela prouve que}$$

$$S(\Lambda, -) = \sum_{-\infty}^{-1} \mathcal{P}(\Lambda) + \mathcal{Q}(\Lambda) + \sum_1^{+\infty} \mathcal{P}(\Lambda) = \sum_{-\infty}^{-1} \mathcal{P}(\Lambda_n) + [\mathcal{Q}(\Lambda_n) + (M-n-1)\mathcal{P}_n(\Lambda_n)] +$$

$$+ \sum_1^{+\infty} \mathcal{P}(\Lambda_n) = \sum_{-\infty}^{-1} \mathcal{P}(\Lambda_n) + \mathcal{Q}(\Lambda_n) + [(M-n-1)\mathcal{P}_n(\Lambda_n) + \sum_1^{+\infty} \mathcal{P}(\Lambda_n)] = S(\Lambda_n, -), \text{ car}$$

$$(M-n-1)\mathcal{P}_n(\Lambda_n) + \sum_1^{+\infty} \mathcal{P}(\Lambda_n) = \sum_1^{+\infty} \mathcal{P}(\Lambda_n).$$

Cela étant, soit $S = (\Lambda, \xi)$, avec $\xi = +, 0$ ou $-$ et

$\Lambda = (1_i ; i < M < +\infty)$ tel que $1_{M-1} \neq 0$ ou $\Lambda = (0, \dots, 0)$ si $\xi = -$.

On sait (remarques 2 et 3 précédentes) que la direction de minceur α de $S(\Lambda, \xi)$ est $\alpha(\Lambda)$ si $\xi = 0$ ou $+$, et elle est $\alpha(\Lambda^*)$ [$\Lambda^* = (1_1, \dots, 1_{M-1} - 1)$ ou $\emptyset$ selon que $\Lambda \neq (0, \dots, 0)$ ou $\Lambda = (0, \dots, 0)$] si $\xi = -$. Soit L' la α -tangente inférieure de $S(\Lambda, \xi)$. Si $S = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} S_i(\Lambda, \xi)$, soient L'_i la α -tangente inférieure de $S_i(\Lambda, \xi)$ et $[L'_i]$ sa partie dont la projection horizontale coïncide avec celle de $S_i(\Lambda, \xi)$.

Si $\xi = 0$, les différentes $S_i(\Lambda, \xi)$, et, par conséquent, leurs α -tangentes inférieures sont translatées les unes des autres par des vecteurs portés par des droites de pentes $\alpha(\Lambda)$. Donc, toutes les L'_i coïncident, elles sont donc toutes confondues avec L' . Comme la partie $[L'_i]$ qui rencontre la ligne polygonale $S_i(\Lambda, \xi)$ en contient au moins un sommet P_i , il est clair (car $L' = L'_i \supset [L'_i]$ pour tout i) qu'il existe sur L' des points entiers de $S(\Lambda, 0)$ d'abscisses arbitrairement petites ou arbitrairement grandes.

Si $\xi = +$ ou $-$, pour les mêmes raisons que plus haut, on aura $L'_1 = L'_2 = \dots = L'_i = \dots$ et $L'_{-1} = L'_{-2} = \dots = L'_{-i} = \dots$ (où $i > 0$ est un entier arbitraire). De plus, si Q est la fin de la courbe $S_0(\Lambda, \xi)$, qui commence au point $\dot{O}$, on a : $h_\alpha(Q) > 0$ ou $h_\alpha(Q) < 0$ selon que la pente de la droite passant par $\dot{O}$ et Q est $> \alpha$ ou $< \alpha$. Or, si $\xi = +$, $S_0(\Lambda, \xi) = \mathcal{J}(\Lambda)$ et la pente de la droite portant $\dot{O} Q$ est $\alpha(\Lambda^*) < \alpha(\Lambda) = \alpha$; par contre, si $\xi = -$, $S_0(\Lambda, \xi) = \mathcal{Q}(\Lambda)$ et la pente de la droite $\dot{O} Q$ est $\alpha(\Lambda) > \alpha(\Lambda^*) = \alpha$ (remarque 3 précédente). Il en résulte que si $\xi = +$, on a : $h(L'_{-1}) > h(L'_1)$, tandis que si $\xi = -$, on aura $h(L'_{-1}) < h(L'_1)$. Si $\xi = +$, $S_0(\Lambda, \xi)$ étant égale à $\mathcal{J}(\Lambda)$, coïncide avec une partie finale d'une courbe $\mathcal{Q}(\Lambda)$ placée de façon à se terminer en Q . Si L''_0 est la α -tangente inférieure d'une $\mathcal{Q}(\Lambda)$ placée comme plus haut, il est clair que l'on a $L''_0 = L'_1$ et $h(L'_0) \geq h(L''_0)$ [car $S_0(\Lambda, +)$ est une partie de la $\mathcal{Q}(\Lambda)$ considérée].

Si $\xi = -$, $S_0(\Lambda, -) \equiv \Omega(\Lambda) = S'_0(\Lambda, -) + S''_0(\Lambda, -)$, où $S'_0(\Lambda, -) = \Omega_{M-2}(\Lambda)$ et $S''_0(\Lambda, -) = \mathcal{P}(\Lambda)$. Soient $L^{*'}_0$ et $L^{*''}_0$ les α -tangentes inférieures à $S'_0(\Lambda, -)$ et $S''_0(\Lambda, -)$. Comme $S''_0(\Lambda, -)$ est la translatée parallèlement à L'_1 de $S_1(\Lambda, -)$, on a $L^{*''}_0 = L'_1$. D'autre part, si $\Lambda \neq (0, \dots, 0)$, on a, par hypothèse : $l_{M-1} \neq 0$ si $\xi = -$, donc $\Omega_{M-2}(\Lambda)$ est, à une translation près, le début de $\mathcal{P}(\Lambda) = l_{M-1} \Omega_{M-2}(\Lambda) + \mathcal{P}_{M-2}(\Lambda)$. Donc si l'on place une $\mathcal{P}(\Lambda)$ de telle sorte qu'elle commence en $\dot{0}$, on voit que sa α -tangente inférieure coïncide, pour la même raison que précédemment, avec L'_{-1} . Cela est encore vrai si $\Lambda = (0, \dots, 0)$, car alors $S'_0(\Lambda, -) = \Omega_0$ et sa tangente inférieure passe par son début. Mais $S_0(\Lambda, -)$ est une partie de la courbe $\mathcal{P}(\Lambda)$ placée comme plus haut. On a donc $h(L^{*''}) > h(L^*_0) = h(L'_{-1})$. Ainsi, si $\xi = +$, on a $L' = L'_1 = \dots = L'_1 = \dots$ et $[L'_i] \cap [L' \cap E(S)] \neq \emptyset$ pour tout $i \geq 1$, (tandis que $[L'_i] \cap [L' \cap E(S)] = \emptyset$ pour tout $i \geq -1$). Par contre, si $\xi = -$, on a $L' = L_{-1} = L_{-2} = \dots = L_{-i} = \dots$ et $[L' \cap E(S)] \cap [L'_{-i}] \neq \emptyset$ pour tout $i \geq 1$. Par contre, si q_1 est l'abscisse de Q , on a $[q_1, +\infty[\cap [L' \cap E(S)] = \emptyset$. Donc, si $\xi \neq 0$, il existe un point $Q' \in L'$ tel que si $L'(Q', +)$ et $L'(Q', -)$ sont les demi-droites de L' d'origine Q' , orientées respectivement vers les abscisses croissantes et vers celles décroissantes, $L'(Q', +) \cap E(S)$ est infini et $L'(Q', -) \cap E(S) = \emptyset$ si $\xi = +$, la situation étant inversée si $\xi = -$. Et si $\xi = 0$, quel que soit $Q' \in L'$, les demi-droites $L'(Q', +)$ et $L'(Q', -)$ contiennent une infinité de points de $E(S)$. Donc, si $S(\Lambda, \xi) = S(\Lambda', \xi')$, on doit avoir $\xi = \xi'$.

Mais si $\xi = \xi'$, l'égalité $S(\Lambda, \xi) = S(\Lambda', \xi')$ (les courbes étant fixées ou considérées à une translation près) équivaut à celle de leurs directions de minceur α et α' .

Or, si $\xi = +$ ou 0 , on a $\alpha = \alpha(\Lambda)$, $\alpha' = \alpha(\Lambda')$, donc $\alpha = \alpha' \Rightarrow \Lambda = \Lambda'$. Si $\xi = -$, on a $\alpha = \alpha(\Lambda^*)$, $\alpha' = \alpha(\Lambda'^*)$, il en résulte $\Lambda^* = \Lambda'^*$.

Soient $\Lambda = (l_1, l_2, \dots, l_{M-1})$, $\Lambda' = (l'_1, l'_2, \dots, l'_{M'-1})$, n et n' les plus grands entiers tels que $l_n \neq 0$ et $l'_{n'} \neq 0$, si de tels entiers existent. Alors $\Lambda^* = (l_1, \dots, l_n - 1)$ et $\Lambda'^* = (l'_1, \dots, l'_{n'} - 1)$. Par suite, $\Lambda^* = \Lambda'^*$ entraîne $n = n'$ et $l_i = l'_i$ pour tout $i \leq n = n'$.

Enfin, si $\xi = -$ et si l'une des suites Λ , Λ' est $(0, \dots, 0)$, le Λ^* ou Λ'^* correspondant est $\emptyset$. Donc le $\alpha(\Lambda^*)$ ou $\alpha(\Lambda'^*)$ correspondant sera égal à -1 , auquel cas $\alpha(\Lambda^*) = \alpha(\Lambda'^*)$ implique $\Lambda^* = \Lambda'^* = \emptyset$, et Λ , Λ' sont tous les deux de la forme $(0, \dots, 0)$ (mais de longueurs pouvant être différentes). Par conséquent, si par exemple, $M' > M$, la suite Λ' ne diffère de Λ que par ses $M' - M$ derniers termes qui sont nuls. En particulier, si $n = M-1$ et $n' = M'-1$, on doit avoir $\Lambda = \Lambda'$.

(B) Considérons maintenant le cas où Λ est la suite infinie $(l_1, \dots, l_i, \dots)$ et Ξ est également la suite infinie $(\xi_1, \dots, \xi_i, \dots)$.

Faisons correspondre à tout entier positif i une courbe (définie à une translation près) $S_i = S_i' + \tilde{S}_i + S_i''$, où l'on pose, dans tous les cas,

$$(1) S_i' = \mathcal{P}_i(\Lambda), \text{ si } i \neq 0$$

$$(2) S_0' = \emptyset$$

$$(3) S_i'' = \mathcal{P}_i'(\Lambda) = l_i \mathcal{Q}_{i-1}(\Lambda) + l_{i-1} \mathcal{Q}_{i-2}(\Lambda) + \dots + l_1 \mathcal{Q}_0$$

$$(4) \tilde{S}_i = \mathcal{Q}_i(\Lambda) \text{ ou } \mathcal{P}_i(\Lambda) \text{ selon que } \xi_{i+1} < l_{i+1} \text{ ou } \xi_{i+1} = l_{i+1} + 1.$$

Désignons par A_i , B_i , C_i les points qui sont les débuts des courbes S_i' , $\tilde{S}_i$, S_i'' et D_i le point qui est la fin de S_i'' . Comme

$$\mathcal{Q}_i(\Lambda) = (l_{i+1}) \mathcal{Q}_{i-1}(\Lambda) + \mathcal{P}_{i-1}(\Lambda) = \mathcal{Q}_{i-1}(\Lambda) + \mathcal{P}_i(\Lambda), \text{ on peut écrire}$$

$$\mathcal{Q}_i(\Lambda) = \sum_{j=0}^{l_i+1} S_{i,j}$$

où $S_{i,j} = \mathcal{Q}_{i-1}(\Lambda)$ ou $\mathcal{P}_{i-1}(\Lambda)$ selon que $j < l_i + 1$ ou $j = l_i + 1$. On peut alors

poser $\mathcal{P}_i(\Lambda) = \sum_{j=1}^{l_i+1} S_{i,j}$. De sorte que les points $Q_{i,j}$ où commencent les $S_{i,j}$

dans $\tilde{S}_i$ ((4)) s'identifient à certains sommets de cette ligne brisée, dont le début B_i devient $Q_{i,0}$ ou $Q_{i,1}$ selon que $\tilde{S}_i = \mathcal{Q}_i(\Lambda)$ ou $\tilde{S}_i = \mathcal{P}_i(\Lambda)$.

Cela étant, soit, pour tout $i \geq 1$,

$$\varphi_i : S_{i-1}(\Lambda) \rightarrow S_i(\Lambda)$$

l'application de $S_{i-1}(\Lambda) \rightarrow S_i(\Lambda)$ induite par la translation, qui applique B_{i-1} sur Q_{i,ξ_i} . Il y a lieu de vérifier que cette translation est définie de façon cohérente, autrement dit, que Q_{i,ξ_i} existe quel que soit ξ_i et qu'elle applique S_{i-1} dans S_i . On a, par définition, $\tilde{S}_i \subseteq S_i(\Lambda)$ et $\tilde{S}_i = \mathcal{Q}_i(\Lambda)$ ou $\mathcal{P}_i(\Lambda)$ selon que $\xi_{i+1} < l_{i+1} + 1$ ou $\xi_{i+1} = l_{i+1} + 1$. Donc, si $\xi_i \neq 0$, le point Q_{i,ξ_i} existe dans tous les cas. D'autre part, $Q_{i,0}$ existe si $\tilde{S}_i = \mathcal{Q}_i(\Lambda)$. Mais $\tilde{S}_i = \mathcal{P}_i(\Lambda)$ signifie que $\xi_{i+1} = l_{i+1} + 1$, ce qui implique $\xi_{i+1} \neq 0$. La courbe $\tilde{S}_{i-1}$ qui commence au point B_{i-1} est une $\mathcal{Q}_{i-1}(\Lambda)$ ou une $\mathcal{P}_{i-1}(\Lambda)$ selon que $\xi_i < l_i + 1$ ou $\xi_i = l_i + 1$. Mais la courbe S_{i,ξ_i} qui commence au point Q_{i,ξ_i} est aussi une $\mathcal{Q}_{i-1}(\Lambda)$ ou une $\mathcal{P}_{i-1}(\Lambda)$ selon que $\xi_i < l_i + 1$ ou $\xi_i = l_i + 1$, on a, par conséquent, $\varphi_i \tilde{S}_{i-1} = S_{i,\xi_i} \subseteq \tilde{S}_i$. Si $i = 1$, on a $S_{i-1} = S_0 = \tilde{S}_0$, ce qui montre que $\varphi_0.S_0 \subseteq \tilde{S}_1 \subseteq S_1(\Lambda)$.

Supposons $i > 1$. La courbe S_{i,ξ_i} est précédée d'une courbe qui se termine au point Q_{i,ξ_i} , cette courbe n'étant autre que $S_{i,\xi_{i-1}} = \mathcal{Q}_{i-1}(\Lambda)$, sauf si $\xi_i = 0$ ou si, à la fois, $\xi_i = 1$ et $\xi_{i+1} = l_{i+1} + 1$. Dans ces deux derniers cas, S_{i,ξ_i} est précédée par $S'_i = \mathcal{P}_i(\Lambda)$. Mais $\mathcal{P}_i(\Lambda)$ comme $\mathcal{Q}_i(\Lambda)$ se termine par une courbe égale à $\mathcal{P}_{i-1}(\Lambda)$, ainsi, on a $\varphi_i S'_{i-1} \subseteq S_i$. D'autre part, la fin de la courbe S_{i,ξ_i} (qui est $Q_{i,\xi_{i+1}}$ si $\xi_i < l_i + 1$ et C_i si $\xi_i = l_i + 1$) est

le début de la courbe $S_{i, \xi_i+1} = \mathcal{Q}_{i-1}(\Lambda)$ ou $\mathcal{P}_{i-1}(\Lambda)$ (selon que $\xi_i < l_i + 1$ ou $\xi_i = l_i + 1$) ou de la courbe $S_i'' = \mathcal{P}'_i(\Lambda)$ si $\xi_i = l_i + 1$. Mais toutes ces courbes commencent par $\mathcal{P}'_{i-1}(\Lambda)$; ainsi, on a aussi $\varphi_i \cdot S_i'' \subseteq S_i$. Donc, on a toujours $\varphi_i \cdot S_{i-1} \subseteq S_i$.

Considérons pour tout couple (i, j) tel que $i < j$, l'application (qui est injective, car les φ_i induites par des translations le sont)

$$\varphi_{j,i} = \varphi_j \varphi_{j-1} \cdots \varphi_{i+1} : S_i \rightarrow S_j$$

Les applications $i \rightarrow S_i$ ($i = 0, 1, 2, \dots$) et $(i, j) \rightarrow \varphi_{j,i}$ ($i, j \in \mathbb{N}$, $i < j$) forment de façon évidente un système inductif.

On pose

$$S = S(\Lambda, \Xi) = \varinjlim (S_i, \varphi_{j,i})$$

Lemme 1. On conserve les données et notations introduites dans B. On a

1° La projection horizontale $\bar{E}$ $[S(\Lambda, \Xi)]$ de l'ensemble $E[S(\Lambda, \Xi)]$ des points entiers de $S(\Lambda, \Xi)$ est l'ensemble des points entiers de l'axe X_1 .

2° Si l'on suppose que $\text{Ep}[S(\Lambda, \Xi)] < +\infty$ (ce qui sera prouvé plus tard), la direction de minceur α de $S(\Lambda, \Xi)$ est égale au nombre réel $\alpha(\Lambda)$ (forcément irrationnel) dont la décomposition en fraction négacontinue est

$$\frac{-1}{d_1 - \frac{1}{d_2 - \frac{1}{\ddots}}}$$

où $d_i = l_i + 2$.

Soit $\bar{\Phi}_i$ l'application canonique de S_{i-1} dans $S(\Lambda, \Xi)$, cette courbe étant placée de manière que $\varphi_1 \cdot B_0 = 0$. Alors, pour tout i ($i = 1, 2, \dots$) on a $\overline{\bar{\Phi}_i \cdot B_{i-1}} \leq 0$ et $\overline{\bar{\Phi}_i \cdot C_i} \geq 0$ (rappelons que pour tout point $P \in \mathbb{R}^2$, $\bar{P}$ désigne sa projection horizontale). Les $\bar{A}_i$, $\bar{D}_i$ étant les projections horizontales des extrémités A_i , D_i de la courbe $S_i = S'_i + \tilde{S}_i + S''_i$, il existe pour tout entier $\bar{P}$ du segment $[\bar{A}_i, \bar{D}_i]$, un point P de S_i dont il est la projection horizontale.

Par suite, pour tout i , tous les points entiers du segment $[\overline{\Phi_{i+1} \cdot A_i}, \overline{\Phi_{i+1} \cdot D_i}]$ appartiennent à $\overline{E}(S)$. Pour montrer que $\overline{E}(S)$ coïncide avec l'axe X_1 , il suffit de montrer que $\overline{\Phi_{i+1} \cdot A_i} \rightarrow -\infty$ et $\overline{\Phi_{i+1} \cdot D_i} \rightarrow +\infty$ quand $i \rightarrow +\infty$.

$$\text{Or, } \overline{\Phi_{i+1} \cdot A_i} \leq \overline{\Phi_{i+1} \cdot A_i} - \overline{\Phi_{i+1} \cdot B_i} = -(\overline{\Phi_{i+1} \cdot B_i} - \overline{\Phi_{i+1} \cdot A_i}) = -(\overline{B_i} - \overline{A_i}),$$

mais $(\overline{B_i} - \overline{A_i})$ est la longueur (notée $\overline{a_i}$) de la projection horizontale de $S'_i = \mathcal{P}_i(\Lambda)$; tandis que $\overline{\Phi_{i+1} \cdot D_i} \geq \overline{\Phi_{i+1} \cdot D_i} - \overline{\Phi_{i+1} \cdot C_i} = \overline{D_i} - \overline{C_i}$, qui est la longueur de la projection horizontale de $S''_i = \mathcal{P}'_i(\Lambda) = \mathcal{P}_i(\Lambda) - \mathcal{P}_0$, qui est égale à $\overline{a_i} - 1$. Ainsi, on a $\overline{\Phi_{i+1} \cdot A_i} \leq -\overline{a_i}$ et $\overline{\Phi_{i+1} \cdot D_i} \geq \overline{a_i} - 1$. Il suffit donc de prouver que $\overline{a_i} \rightarrow +\infty$ quand $i \rightarrow +\infty$. Or, si $l_{i+1} \neq 0$, la longueur $\overline{a_{i+1}}$ de la projection horizontale de $\mathcal{P}_{i+1}(\Lambda) = l_{i+1} \mathcal{P}_i(\Lambda) + \mathcal{P}_i(\Lambda)$ est $> l_{i+1} \overline{a_i} + \overline{a_i} \geq 2\overline{a_i}$.

Comme, par hypothèse, il existe une infinité d'indices i tels que $l_i \neq 0$ (sinon, à partir d'un certain rang, on aurait toujours $l_i = 0$, donc $d_i = 2$), on voit que $\overline{a_i} \rightarrow +\infty$, ce qui prouve 1°.

Si $\text{Ep}(S) < +\infty$ et si $P = (p_1, p_2)$, $Q = (q_1, q_2)$ sont deux points de S ,

la pente $\frac{q_2 - p_2}{q_1 - p_1}$, de la droite passant par P et Q , tend vers la direction de minceur de S quand $q_1 - p_1$ tend vers $\pm\infty$, et cela, uniformément par rapport à $|q_1 - p_1|$. Or, $S = S(\Lambda, E)$ comporte pour tout i la partie $\overline{\Phi_{i+1} \cdot \tilde{S}_i} \subseteq \overline{\Phi_{i+1} \cdot S_i}$, translatée de $\tilde{S}_i = \mathcal{Q}_i(\Lambda)$ ou $\mathcal{T}_i(\Lambda)$, dont les extrémités $\overline{\Phi_{i+1} \cdot B_i}$ et $\overline{\Phi_{i+1} \cdot C_i}$ sont des points de $S = S(\Lambda, E)$. Mais on sait déjà (démonstration de la remarque 2 (6.3.1) (A)) que la pente de la droite passant par $B_i C_i$ est, si $l_i \neq 0$ (donc $d_i > 2$), la i -ième réduite

$$\alpha_i = \frac{-1}{d_1 - \frac{1}{d_2 - \dots - \frac{1}{d_i}}}$$

de $\alpha(\Lambda)$ si $\tilde{S}_i = \mathcal{Q}_i(\Lambda)$ ou

$$\alpha_i^* = \frac{-1}{d_1 - \frac{1}{d_2 - \dots - \frac{1}{d_i - 1}}}$$

si $\tilde{S}_i = \mathcal{P}_i(\Lambda)$. Comme $\alpha_i \rightarrow \alpha$ et que $\alpha_i - \alpha_i^* = \frac{1}{a_i} \rightarrow 0$ quand $i \rightarrow +\infty$, on voit

que, quand $i \rightarrow +\infty$, la différence $q_1 - p_1$, des projections horizontales des points C_i, B_i , tend vers $+\infty$, tandis que la pente de la droite passant par ces points tend vers $\alpha(\Lambda)$ [du moins si l'on se borne aux indices i tels que $l_i \neq 0$; par hypothèse, il existe une infinité de tels indices]. Cela prouve 2° et achève la démonstration du lemme.

Soient $\Lambda = (l_1, l_2, \dots, l_i) \ (i > 0)$ une suite d'entiers positifs et S une courbe

$$S = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} S_j$$

où chaque S_j est une des courbes $\mathcal{Q}(\Lambda), \mathcal{P}(\Lambda)$. Supposons que parmi les S_j il y a au moins deux égales à $\mathcal{Q}(\Lambda)$ et au moins deux égales à $\mathcal{P}(\Lambda)$. On dira que les courbes $S_{j'} = \mathcal{P}(\Lambda)$ et $S_{j''} = \mathcal{P}(\Lambda) \ (j' < j'')$ sont des $\mathcal{P}$ -courbes voisines de S si pour tout j tel que $j' < j < j''$ la courbe S_j est de la forme $\mathcal{Q}(\Lambda)$. Cela étant, on a

Lemme 2. Si les translatées entières de la courbe S précédentes ne se traversent pas, on a

1° Le nombre $j'' - j' - 1$ de courbes $S_j = \mathcal{Q}(\Lambda)$ séparant deux $\mathcal{P}$ -courbes voisines $S_{j'}, S_{j''}$ de S ne peut prendre que deux valeurs au plus

2° Si le nombre $j'' - j' - 1$ de 1° prend effectivement deux valeurs, ces valeurs sont consécutives, la plus petite étant notée l_{i+1} (si une seule valeur est prise par $j'' - j' - 1$, elle n'est pas 0, car on a supposé qu'il existe des $S_j = \mathcal{Q}(\Lambda)$, on la notera $l_{i+1} + 1$ où l_{i+1} est un entier tel que $l_{i+1} \geq 0$).

Supposons que $j'' - j' - 1$ prenne plus de deux valeurs et soit l la plus petite de ces valeurs. Alors, il existe une partie S' de S égale à $\mathcal{P}(\Lambda) + l\mathcal{Q}(\Lambda) + \mathcal{P}(\Lambda)$, et d'autre part, une partie S'' de S égale à $(1+2)\mathcal{Q}(\Lambda)$.

Supposons que la courbe S_j qui précède S' sur S soit égale à $\mathcal{Q}(\Lambda)$ (ce qui est nécessairement le cas si $l \neq 0$) et comparons les courbes partielles de S suivantes :

$$S'^* = \mathcal{Q}(\Lambda) + S' = [\mathcal{Q}(\Lambda) + \mathcal{P}(\Lambda)] + l\mathcal{Q}(\Lambda) + \mathcal{P}(\Lambda)$$

et

$$S'' = (1+2)\mathcal{Q}(\Lambda) = \mathcal{Q}(\Lambda) + l\mathcal{Q}(\Lambda) + \mathcal{Q}(\Lambda).$$

$$\text{On a } \mathcal{Q}(\Lambda) + \mathcal{P}(\Lambda) = [l_i \mathcal{Q}_{i-1}(\Lambda) + l_{i-1} \mathcal{Q}_{i-2}(\Lambda) + \dots + l_1 \mathcal{Q}_0 + \mathcal{Q}_0] + \\ + [\mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_1(\Lambda) + \dots + \mathcal{P}_{i-1}(\Lambda)] + \mathcal{P}(\Lambda) = U + \mathcal{P}_0 + \mathcal{Q}'(\Lambda)$$

$$\text{où } U = l_i \mathcal{Q}_{i-1}(\Lambda) + l_{i-1} \mathcal{Q}_{i-2}(\Lambda) + \dots + (l_1 + 1)\mathcal{Q}_0$$

$$\mathcal{Q}'(\Lambda) = \mathcal{P}_1(\Lambda) + \dots + \mathcal{P}_{i-1}(\Lambda) + \mathcal{P}_i(\Lambda) = -\mathcal{Q}_0 + \mathcal{Q}(\Lambda)$$

$$\text{et } \mathcal{Q}(\Lambda) = \mathcal{Q}_0 + \mathcal{Q}'(\Lambda).$$

D'autre part, on a :

$$\mathcal{P}(\Lambda) = \mathcal{P}'(\Lambda) + \mathcal{P}_0$$

$$\mathcal{Q}(\Lambda) = \mathcal{P}'(\Lambda) + \mathcal{Q}_0 + [\mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_1(\Lambda) + \dots + \mathcal{P}_{i-1}(\Lambda)] = \mathcal{P}'(\Lambda) + \mathcal{Q}_0 + V$$

$$\text{où } V = \mathcal{P}_0 + \mathcal{P}_1(\Lambda) + \dots + \mathcal{P}_{i-1}(\Lambda).$$

Ainsi, on a :

$$S'^* = U + \mathcal{P}_0 + [\mathcal{Q}'(\Lambda) + l\mathcal{Q}(\Lambda) + \mathcal{P}'(\Lambda)] + \mathcal{P}_0$$

$$S'' = \mathcal{Q}_0 + [\mathcal{Q}'(\Lambda) + l\mathcal{Q}(\Lambda) + \mathcal{P}'(\Lambda)] + \mathcal{Q}_0 + V.$$

Soient B' , C' le début et la fin de la partie $\mathcal{Q}'(\Lambda) + l\mathcal{Q}(\Lambda) + \mathcal{P}'(\Lambda)$ de S'^* , et soient B'' , C'' ceux de la partie de même forme de S'' . Soient A' , D' le début et la fin de la partie $\tilde{S}' = \mathcal{P}_0 + [\mathcal{Q}'(\Lambda) + l\mathcal{Q}(\Lambda) + \mathcal{P}'(\Lambda)] + \mathcal{P}_0$ de S'^* , et soient A'' , D'' ceux de la partie $\tilde{S}'' = \mathcal{Q}_0 + [\mathcal{Q}'(\Lambda) + l\mathcal{Q}(\Lambda) + \mathcal{P}'(\Lambda)] + \mathcal{Q}_0$ de S'' .

Alors, on a : $A' = B' - e_1 + e_2$, $D' = C' + e_1 - e_2$, $A'' = B'' - e_1$ et $D'' = C'' + e_1$.

Soit T la translation qui transporte B' en B'' . Alors : $T.B' = B''$,
 $T.C' = C''$, $T.A' = T(B' - e_1 + e_2) = T.B' - e_1 + e_2 = (B'' - e_1) + e_2 = A'' + e_2$ et
 $T.D' = T(C' + e_1 - e_2) = T.C' + e_1 - e_2 = (C'' + e_1) - e_2 = D'' - e_2$. Ainsi $T.A'$ est au-dessus
de A'' et $T.D'$ est au-dessus de D'' . Donc, $T.\tilde{S}' \subseteq T.S'^* \subset T.S$ traverse
 $\tilde{S}'' \subseteq S'' \subset S$ et $T.S$ traverse S .

Si $l = 0$ et si l'on peut trouver une partie de S de la forme
 $\mathfrak{L}(\Lambda) + 2\mathcal{P}(\Lambda)$, on se trouve dans un cas particulier de la démonstration
précédente. Reste donc à envisager le cas où S ne contient pas de partie de la
forme $\mathfrak{L}(\Lambda) + 2\mathcal{P}(\Lambda)$ mais contient des parties de la forme $2\mathcal{P}(\Lambda)$. Dès lors
si $S_j = S_{j+1} = \mathcal{P}(\Lambda)$, on doit avoir $S_q = \mathcal{P}(\Lambda)$ pour tout $q < j$. Ainsi, il existe
un j_0 tel que $S_j = \mathcal{P}(\Lambda)$ pour tout $j \leq j_0$, mais que $j > j_0$ et $S_j = \mathcal{P}(\Lambda)$ im-
pliquent $S_{j-1} = S_{j+1} = \mathfrak{L}(\Lambda)$. En échangeant l'indexation, on peut supposer $j_0 = 0$.
Soient A_{j-1} , A_j le début et la fin de S_j , on pose $A_j = (x_{j,1}, x_{j,2})$. Alors,
il est clair que la partie $S' = \sum_{j=-\infty}^0 S_j$, qui est une juxtaposition des courbes
finies, toutes égales à $\mathcal{P}(\Lambda)$, est une courbe infinie (dans le sens des abscisses
négatives) dont l'ensemble de minceur est $\{\alpha(\Lambda^*)\}$ [(A), remarque 3, 1°] et
 $e = \text{Ep}_{\alpha(\Lambda^*)}(S') = \text{Ep}_{\alpha(\Lambda^*)}(\mathcal{P}(\Lambda))$ est finie. D'autre part, si $j \geq 0$, la courbe
 $S_{2j+1} + S_{2j+2}$, dont les extrémités sont A_{2j} et A_{2j+2} est de l'une des formes
 $\mathcal{P}(\Lambda) + \mathfrak{L}(\Lambda)$, $\mathfrak{L}(\Lambda) + \mathcal{P}(\Lambda)$, $2\mathfrak{L}(\Lambda)$, et la pente de la droite passant par
 A_{2j} et A_{2j+2} est

$$\geq \frac{\bar{b}_i + b_i}{\bar{a}_i + a_i} = \left[\frac{\bar{a}_i}{\bar{a}_i + a_i} \frac{\bar{b}_i}{\bar{a}_i} + \frac{a_i}{a_i + \bar{a}_i} \frac{b_i}{a_i} \right] = \left[\frac{\bar{a}_i}{\bar{a}_i + a_i} \alpha(\Lambda^*) + \frac{a_i}{\bar{a}_i + a_i} \alpha(\Lambda) \right] \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} [\alpha(\Lambda) + \alpha(\Lambda^*)], \text{ car } \alpha(\Lambda) > \alpha(\Lambda^*) \text{ et } a_i > \bar{a}_i.$$

Soit T_j la translation telle que $T_j \cdot A_{2j} = A_{-2j}$. Alors, d'une part,

$$\begin{aligned} h_{\alpha(\Lambda^*)}(T_j \cdot A_o) &= h_{\alpha(\Lambda^*)}(T_j \cdot A_{2j}) + [x_{o,2} - x_{2j,2} - \alpha(\Lambda^*)(x_{o,1} - x_{2j,1})] < \\ &< h_{\alpha(\Lambda^*)}(A_{-2j}) + [\alpha(\Lambda^*) - \frac{1}{2}(\alpha(\Lambda^*) + \alpha(\Lambda))] 2j\bar{a}_j = h_{\alpha(\Lambda^*)}(A_{-2j}) - j[\alpha(\Lambda) - \alpha(\Lambda^*)]\bar{a}_i, \\ \text{car } x_{2j,2} - x_{o,2} &\geq \frac{1}{2}[\alpha(\Lambda) + \alpha(\Lambda^*)](x_{2j,1} - x_{o,1}) \text{ [puisque la pente de la} \\ \text{droite passant par } A_{2j-2} \text{ et } A_{2j} \text{ est } &\geq \frac{1}{2}(\alpha(\Lambda) + \alpha(\Lambda^*))] \text{ et } x_{2j,1} - x_{o,1} > 2j\bar{a}_i \end{aligned}$$

(puisque la longueur de la projection horizontale de $S_{j-1} + S_j$ est $\geq a_i + \bar{a}_i > 2\bar{a}_j$). D'autre part si j' est le plus grand indice tel que l'abscisse de $T_{j'} \cdot A_{2j'}$, soit ≤ 0 , cette abscisse est $\geq -2a_i$ (car $x_{2j'+2,1} - x_{2j',1} \leq 2a_i$),

donc : $x_{2j',1} - x_{2j,1} \geq (x_{2j,1} - x_{-2j,1}) - 2a_i \geq 4j\bar{a}_i - 2a_i$, d'où résulte

$$\begin{aligned} h_{\alpha(\Lambda^*)}(T_{j'} \cdot A_{2j'}) &= h_{\alpha(\Lambda^*)}(A_{-2j}) + (x_{2j',2} - x_{2j,2}) - \alpha(\Lambda^*)(x_{2j',1} - x_{2j,1}) \geq \\ &\geq h_{\alpha(\Lambda^*)}(A_{2j}) + \frac{1}{2}(\alpha(\Lambda) + \alpha(\Lambda^*)) (x_{2j',1} - x_{2j,1}) - \alpha(\Lambda^*)(x_{2j',1} - x_{2j,1}) = \\ &= h_{\alpha(\Lambda^*)}(A_{2j}) + \frac{1}{2}(\alpha(\Lambda) - \alpha(\Lambda^*)) (x_{2j',1} - x_{2j,1}) \geq h_{\alpha(\Lambda^*)}(A_{-2j}) + \\ &+ \frac{1}{2}(\alpha(\Lambda) - \alpha(\Lambda^*)) [4j\bar{a}_i - 2a_i] = h_{\alpha(\Lambda^*)}(A_{-2j}) + (\alpha(\Lambda) - \alpha(\Lambda^*)) (2ja_i - \bar{a}_i). \end{aligned}$$

Or, si P est un point quelconque de S' , on a $|h_{\alpha(\Lambda^*)}(P) - h_{\alpha(\Lambda^*)}(A_{-2j})| \leq e$

Par suite, si $j(\alpha(\Lambda) - \alpha(\Lambda^*))\bar{a}_i > e$ et $2j(\alpha(\Lambda) - \alpha(\Lambda^*)) > e + \bar{a}_i(\alpha(\Lambda) - \alpha(\Lambda^*))$, on a

$$h_{\alpha(\Lambda^*)}(T_j \cdot A_o) < h_{\alpha(\Lambda^*)}(A_{-2j}) - e \text{ et } h_{\alpha(\Lambda^*)}(T_{j'} \cdot A_{2j'}) > h_{\alpha(\Lambda^*)}(A_{-2j}) + e.$$

Par suite, $T_j \cdot A_o$ se trouve au-dessous du point de S' de même abscisse et

$T_{j'} \cdot A_{2j'}$ se trouve au-dessus d'un point de S' de même abscisse. Par conséquent,

$T_j \cdot S$ et S se traversent, contrairement à l'hypothèse.

Corollaire. Avec les hypothèses du lemme précédent, S est aussi la juxtaposition des courbes S'_q

$$S = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} S'_q$$

telle que toute S'_q est de la forme $\mathcal{L}(\Lambda')$ ou $\mathcal{J}(\Lambda')$ où $\Lambda' = (l_1, l_2, \dots, l_i, l_{i+1})$,

et chaque S'_q est une juxtaposition $\sum_{j=j_q}^{j_{q+1}} S_j$ de certaines courbes S_j précédentes
 (on dira, dans ce cas, que $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} S_j$ est un raffinement de $\sum_{q=-\infty}^{+\infty} S'_q$).

En effet, soit $\mathcal{J}$ l'ensemble des indices j tels que $S_j = \mathcal{P}(\Lambda)$.

Comme, d'après le lemme précédent, la différence de deux indices consécutifs de $\mathcal{J}$ est $l_{i+1} + 1$ ou $l_{i+1} + 2$, cet ensemble d'indices, ordonné par l'ordre induit par celui de $\mathbb{Z}$, est un ensemble ordonné semblable à $\mathbb{Z}$. On peut donc représenter cet ensemble sous la forme $\mathcal{J} = \{j_q ; q \in \mathbb{Z}\}$ de manière que $j_q < j_{q+1}$ pour tout $q \in \mathbb{Z}$. Dès lors, si l'on pose

$$S'_q = \sum_{j=j_q}^{j_{q+1}} S_j$$

on a : $S'_q = \mathcal{Q}(\Lambda)$ ou $\mathcal{P}(\Lambda')$ selon que $j_q - j_{q-1} = l_{i+1} + 1$ ou $j_{q+1} - j_q = l_{i+1}$,
 ce qui prouve que l'on a bien

$$S = \sum_{q=-\infty}^{+\infty} S'_q.$$

Il n'est pas possible que tout S'_q soit de la forme $\mathcal{P}(\Lambda')$, car cela signifierait que $j_{q+1} - j_q$ ne prend que la seule valeur l_{i+1} , tandis que, en vertu de nos conventions, cette valeur est notée, dans un tel cas, $l_{i+1} + 1$ et non l_{i+1} .

(6.3.2) Afin d'alléger le langage, on va parler, dans le cas $s = 2$, de courbes indéfinies limites au lieu de hypersurfaces indéfinies limites.

Théorème : Soit $E \subseteq \mathbb{Z}^2 \subseteq \mathbb{R}^2$. Pour que E soit une courbe indéfinie limite de préévaluation, il faut qu'il soit l'ensemble des points entiers $E(S)$ d'une courbe S de l'une des formes suivantes [définies dans (6.3.1) (A) et (B)].

1° $S = S(\Lambda, \xi)$, où $\Lambda = (l_1, \dots, l_i, \dots ; i < M)$ avec M entier ≥ 0 et $\xi = -, 0$ ou $+$, ξ ne pouvant prendre seulement la valeur 0 si $\Lambda = \emptyset$ (c'est-à-dire $M = 0$).

2° $S = S(\Lambda, \Xi)$, où $\Lambda = (l_1, \dots, l_i, \dots ; i < +\infty)$ et $\Xi = (\xi_1, \dots, \xi_i, \dots ; i < +\infty)$ tels que les l_i sont des entiers ≥ 0 qui ne sont pas nuls asymptotiquement et les ξ_i sont des entiers tels que $0 \leq \xi_i \leq l_i + 1$ et, si $i \geq 2$, $\xi_i = l_i + 1 \Rightarrow \xi_{i-1} \neq 0$.

(A) Par hypothèse, l'ensemble E vérifie les conditions 1°, 2° et 3° de (A) [début de (5.1)] que l'on désignera par C_1 , C_2 et C_3 pour éviter toute confusion. D'après C_1 et C_2 la ligne polygonale S passant par les points de E est une juxtaposition infinie de courbes S_j^0 qui sont des $\mathfrak{Q}_0$ ou des $\mathcal{P}_0$ telles qu'il n'existe pas une infinité de S_j^0 successives égales à $\mathfrak{Q}_0$. Il existe par conséquent une infinité de $S_j^0 = \mathcal{P}_0$.

Si toutes les courbes S_j^0 sont égales à $\mathcal{P}_0$, on a $S = S(\emptyset, 0)$.

Si une seule courbe S_j^0 est égale à $\mathfrak{Q}_0$, il est clair que $S = S(\Lambda, -)$, où $\Lambda = (l_1 = 0)$.

S'il existe au moins deux courbes S_j^0 qui sont égales à $\mathfrak{Q}_0$, d'après C_3 il existera une infinité de telles courbes S_j^0 . Et, en vertu du lemme 2 [(6.2.1)], S pourra se mettre sous la forme

$$S = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} S_j^1$$

où les S_j^1 sont des courbes qui sont des $\mathfrak{Q}(\Lambda_1)$ ou des $\mathcal{P}(\Lambda_1)$ avec $\Lambda_1 = (l_1)$, et si $l_1 = 0$ il existe une infinité de $S_j^1 = \mathfrak{Q}(\Lambda_1)$ et une infinité $S_j^1 = \mathcal{P}(\Lambda_1)$ [car $l_1 = 0$ implique $\mathfrak{Q}(\Lambda_1) = \mathfrak{Q}_0 + \mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}(\Lambda_1) = \mathcal{P}_0$, et le cas où il n'y a qu'une seule courbe $S_j^0 = \mathfrak{Q}_0$ a déjà été considéré].

(B) D'après (A) si $S \neq S(\emptyset, 0)$ et $S \neq S((0), -)$, il existe des entiers i tels que pour une suite $\Lambda = (l_1, l_2, \dots, l_i)$ on ait

$$S = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} S_j$$

où S_j est égale à une des courbes $\mathcal{Q}(\Lambda)$, $\mathcal{P}(\Lambda)$ avec la condition supplémentaire suivante : "il existe des j tels que $S_j = \mathcal{Q}(\Lambda)$, et si $i > 1$, $l_i = 0$ le nombre de ces j est ≥ 2 ". Soit I l'ensemble (non vide) de tels entiers.

Il est clair que si $i \in I$, tout indice plus petit que i y appartient aussi. Donc, ou bien $I = \{1, 2, \dots, n\}$ ou bien I est l'ensemble N de tous les entiers naturels.

Dans le premier cas, le corollaire du lemme 2 [(6.2.1)] montre qu'il n'est pas possible qu'il existe à la fois deux entiers distincts j, j' tels que $S_j = S_{j'} = \mathcal{Q}(\Lambda)$ et deux entiers distincts j_1 et j'_1 tels que $S_{j_1} = S_{j'_1} = \mathcal{P}(\Lambda)$, car S serait encore de la même forme que plus haut pour $\Lambda = (l_1, \dots, l_n, l_{n+1})$.

Dès lors, si $I = \{1, 2, \dots, n\}$ trois sous-cas sont possibles :

- a) Toutes les S_j sont de la forme $\mathcal{Q}(\Lambda)$, mais alors $S = S(\Lambda, 0)$.
- b) Il existe un seul $j = j_0$ tel que $S_{j_0} = \mathcal{P}(\Lambda)$, mais alors on a (à une translation près) $S = S(\Lambda, +)$.
- c) Il existe un seul $j = j_0$ tel que $S_{j_0} = \mathcal{Q}(\Lambda)$ (ce qui exige, si $n > 1$, $l_n \neq 0$), mais alors on a (à une translation près) $S = S(\Lambda, -)$.

Considérons le second cas, c'est-à-dire, $I = N$. Et montrons d'abord que

(1) Pour tout i , sauf peut-être pour un seul, et pour tout $\Lambda_i = (l_1, l_2, \dots, l_i)$

tels que S soit une juxtaposition $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} S_j$ du type précédent, il existe au moins

deux entiers distincts j, j' tels que $S_j = S_{j'} = \mathcal{Q}(\Lambda_i)$, et au moins deux entiers distincts j_1, j'_1 tels que $S_{j_1} = S_{j'_1} = \mathcal{P}(\Lambda_i)$.

Supposons que ce ne soit pas le cas pour un $i > 0$. Alors $S = S(\Lambda_i, \xi)$, où $l_i \neq 0$ si $\xi = -$. Mais alors si $i' \neq i$ est aussi un indice pour lequel la propriété énoncée dans (1) précédent n'a pas lieu, on aura $S(\Lambda_i, \xi) = S(\Lambda_{i'}, \xi')$, ce qui implique, compte tenu du lemme 2 de (5.2.1), $\xi = \xi'$ et $\Lambda_i = \Lambda_{i'}$, si $\xi = \xi' \neq -1$ ou $\Lambda_i^* = \Lambda_{i'}^*$. Or si $\Lambda_i = (l_1, \dots, l_i)$, $\Lambda_{i'} = (l'_1, \dots, l'_{i'})$, l'égalité $\Lambda_i = \Lambda_{i'}$ implique $i = i'$ et l'égalité $\xi = \xi' = -$ implique $l_i \neq 0$, $l'_i \neq 0$, donc $\Lambda_i^* = (l_1, \dots, l_{i-1}, l_i - 1)$ et $\Lambda_{i'}^* = (l'_1, \dots, l'_{i-1}, l'_i - 1)$. Dès lors, $\xi = \xi' = -$ et $\Lambda_i^* = \Lambda_{i'}^*$ impliquent aussi $i = i'$.

Ce qui précède prouve qu'il existe un indice i_0 tel que pour tout $i \geq i_0$ et pour tout $\Lambda_i = (l_1, \dots, l_i)$ tels que S ait la décomposition

$$(\gamma_i) \quad S = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} S_j^{(i)}$$

où chaque $S_j^{(i)}$ est égale à l'une des courbes $\mathfrak{B}(\Lambda_i)$, $\mathfrak{P}(\Lambda_i)$, il existe un et un seul entier $l_{i+1} \geq 0$ et une seule décomposition

$$(\gamma_{i+1}) \quad S = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} S_j^{(i+1)}$$

tels que, Λ_{i+1} étant $(\Lambda_i, l_{i+1}) = (l_1, \dots, l_{i+1})$, chaque $S_j^{(i+1)}$ est ou bien de la forme $\mathfrak{B}(\Lambda_{i+1})$ ou bien de la forme $\mathfrak{P}(\Lambda_{i+1})$ ou bien encore une juxtaposition de certaines $S_j^{(i)}$ successives.

Ainsi, si une suite $\Lambda_{i_0} = (l_1, \dots, l_{i_0})$ et une décomposition

$$(\gamma_{i_0}) \quad S = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} S_j^{(i_0)}$$

sont données (en vertu de l'hypothèse $I = \mathbb{N}$, il existe de telles décompositions, et s'il en existe plusieurs, on choisira arbitrairement l'une d'entre elles),

elles définissent par récurrence et de manière unique, pour tout $i \geq i_0$ une suite $\Lambda_i = (l_1, \dots, l_i)$ et une décomposition

$$(\mathcal{J}_i) \quad S = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} s_j^{(i)}$$

du type précédent et de telle sorte que Λ_{i+1} prolonge Λ_i [c'est-à-dire, pour tout $j \geq 1$, l_j soit le même dans tous les Λ_i tels que $i \geq j$, et $(\mathcal{J}_i)$ un raffinement de $(\mathcal{J}_{i+1})$]. On a déjà vu que pour $i \geq i_0$ il existe au moins deux entiers distincts j, j' tels que $s_j^{(i)} = s_{j'}^{(i)} = \mathfrak{L}(\Lambda_i)$, et il existe au moins deux entiers distincts j_1, j'_1 tels que $s_{j_1}^{(i)} = s_{j'_1}^{(i)} = \mathfrak{P}(\Lambda_i)$. On pose $\Lambda = (l_1, l_2, \dots, l_i, \dots; i < +\infty)$, où l_i est la valeur commune du terme ainsi désigné dans tous les Λ_j tels que $j \geq i$. Si $i \geq i_0$, la suite Λ_i est bien la suite des i premiers termes de Λ , ce qui justifie la notation Λ_i adoptée ici. On posera, d'ailleurs, en accord avec la notation générale, $\Lambda_i = (l_1, \dots, l_i)$ même si $i < i_0$. Par ailleurs, on peut définir, par récurrence dans le sens inverse, à partir de la décomposition $(\mathcal{J}_{i_0})$ de S , les décompositions

$$(\mathcal{J}_i) \quad S = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} s_j^{(i)}$$

(où $i = 0, 1, \dots, i_0 - 1$) de la courbe S en courbes de la forme $\mathfrak{L}(\Lambda_i)$ et $\mathfrak{P}(\Lambda_i)$.

En effet, si $(\mathcal{J}_i)$ est déjà définie, pour obtenir $(\mathcal{J}_{i-1})$, on décompose chaque $s_j^{(i)} = \mathfrak{L}(\Lambda_i)$ ou $\mathfrak{P}(\Lambda_i)$ en courbes égales à $\mathfrak{L}(\Lambda_{i-1})$ ou $\mathfrak{P}(\Lambda_{i-1})$, cela selon les formules $\mathfrak{L}(\Lambda_i) = (l_i + 1)\mathfrak{L}(\Lambda_{i-1}) + \mathfrak{P}(\Lambda_{i-1})$ et $\mathfrak{P}(\Lambda_i) = l_i \mathfrak{L}(\Lambda_{i-1}) + \mathfrak{P}(\Lambda_{i-1})$.

(2) Montrons qu'il n'existe pas d'entier $i^* \geq i_0$ tel que, pour toute sous-suite $\Lambda_i = (l_1, \dots, l_q, \dots, l_i)$ de la suite précédente Λ , on ait $q \geq i^* \Rightarrow l_q = 0$.

Autrement on aurait, pour tout $i > i^*$, $\mathcal{P}(\Lambda_i) = \mathcal{P}(\Lambda_{i^*})$ et
 $\mathcal{Q}(\Lambda_i) = \mathcal{Q}(\Lambda_{i^*}) + (i - i^*) \mathcal{P}(\Lambda_{i^*})$.

Par suite, comme S est la juxtaposition des S_j^i qui sont des $\mathcal{Q}(\Lambda_i)$ ou des $\mathcal{P}(\Lambda_i) = \mathcal{P}(\Lambda_{i^*})$ pour tout $i > i^*$, tout $S_j^i = \mathcal{Q}(\Lambda_i)$ est suivie, quel que soit $i > i^*$, par $(i - i^*)$ courbes de la forme $\mathcal{P}(\Lambda_{i^*})$. Donc tout $S_j^i = \mathcal{Q}(\Lambda_i)$ est suivie par une infinité de courbes de la forme $\mathcal{P}(\Lambda_{i^*})$, ce qui, compte tenu de la condition C_3 montre que, contrairement à l'hypothèse, l'on ne peut pas avoir deux courbes S_j^i de la forme $\mathcal{Q}(\Lambda_i)$.

Soit P un point entier de la courbe S . C'est le début d'une courbe $S_{j(0)}^0$ et, pour tout i il existe un et un seul indice $j(i)$ tel que P soit un point de $S_{j(i)}^i$. Posons $\tilde{S}_i = S_{j(i)}^i$. Cette courbe est de l'une des formes $\mathcal{Q}(\Lambda_i)$ ou $\mathcal{P}(\Lambda_i)$. La courbe $S_{j(i)-1}^i$, quelle que soit sa forme, se termine par $S_i^! = \mathcal{P}(\Lambda_i)$, de même, la courbe $S_{j(i)+1}^i$ commence par $S_i'' = \mathcal{P}'(\Lambda_i)$. En posant $S_i = S_i^! + \tilde{S}_i + S_i''$ et en prenant $\varphi_i : S_{i-1} \rightarrow S_i$ égal à l'identité $1_{S_{i-1}}$ de S_{i-1} . Il est clair que S est la limite inductive du système $(i \rightarrow S_i ; \varphi_{j,i})$, où pour $i < j$, $\varphi_{j,i} = \varphi_j \dots \varphi_{i+2} \varphi_{i+1}$. Comme la partition $\{S_j^{i-1}\}$ est un raffinement de $\{S_j^i\}$, on a

$$\tilde{S} = S_{j(i)}^i = \sum_{j=j_0^!}^{j_0''} S_j^{i-1}$$

où $j_0^! \leq j(i-1) \leq j_0''$ et $j_0'' - j_0^! = l_i + 1$ ou $j_0'' - j_0^! = l_i$ selon que $\tilde{S}_i = \mathcal{Q}(\Lambda_i)$ ou $\tilde{S}_i = \mathcal{P}(\Lambda_i)$. On a, de plus $S_{j_0''}^{i-1} = \mathcal{P}(\Lambda_{i-1})$, tandis que si $j_0^! \leq j(i-1) < j_0''$, on a $S_{j_0^!}^{i-1} = \mathcal{Q}(\Lambda_{i-1})$. Posons $\xi_i = l_i + 1 - [j_0'' - j(i-1)]$. Le système d'invariants
 $\Xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i, \dots)$ est bien celui qui définit, Λ étant donné, le système des
applications $\varphi_i : S_{i-1} \rightarrow S_i$ considérées plus haut. En effet, on a $\tilde{S}_i = \mathcal{Q}(\Lambda_i)$
ou $\tilde{S}_i = \mathcal{P}(\Lambda_i)$ selon que $\xi_{i+1} < l_{i+1}$ ou $\xi_{i+1} = l_{i+1} + 1$ et, dans ce dernier cas,

on ne peut pas avoir $\xi_i = 0$, car $\xi_i \geq l_i + 1 - [j_i'' - j_i'] = l_i + 1 - l_i = 1$. Ce qui achève la démonstration du théorème.

Remarque. Les données et les notations précédentes étant conservées, si $I = N$, il n'existe aucun indice i tel que $S = S(\Lambda_i, \xi)$.

En effet, si un tel indice i existait, S serait d'épaisseur finie et sa direction de minceur serait rationnelle. Or, si $Ep(S) < +\infty$, en vertu du lemme 1 [(6.3.1), (B)], la direction de minceur de S ne peut être que $\alpha(\Lambda)$, qui est irrationnel (puisque Λ est infini). Nous voyons en même temps que les courbes indéfinies limites de préévaluation, dont la direction de minceur est rationnelle, se trouve parmi celles obtenues à partir des courbes de R^2 de la forme $S(\Lambda, \xi)$, où $\Lambda = (l_1, l_2, \dots, l_n; n \geq 0)$ est fini, $\xi = 0$ si $\Lambda = \emptyset$ et ξ pouvant être l'un des signes $-, 0, +$ si $n \geq 1$.

(6.3.3) Théorème. Soit S une courbe $S(\Lambda, \xi)$, où $\Lambda = (l_1, \dots, l_n; n \geq 0)$ est telle que les $l_1, \dots, l_n$ sont tous ≥ 0 et où ξ est l'un des signes $-, 0, +$, ne pouvant être que 0 si $\Lambda = \emptyset$. Alors, l'ensemble $E(S)$ des points entiers de S est une courbe indéfinie limite de préévaluation.

D'abord, on sait [début de la démonstration du lemme 2 (6.3.1) (A)] que $S[(l_1, \dots, l_n), -] = S[(l_1, \dots, l_n, 0, \dots, 0), -]$. On peut donc supposer, si $\xi = -$, et si $n > 1$, que l'on a $l_n \neq 0$. Cela étant, soit α un nombre rationnel tel que $-1 < \alpha < 0$ et soit

$$\alpha = \frac{-1}{d_1 - \frac{1}{d_2 - \frac{1}{\ddots - \frac{1}{d_n}}}}$$

le développement de α en fraction négacontinue.

Alors, si l'on pose

$$(1) \quad l_i = d_i - 2 \quad (1 \leq i \leq n)$$

$$(2) \quad \Lambda = (l_1, \dots, l_n)$$

$$(3) \quad \tilde{\Lambda} = (l_1, \dots, l_{n-1}, l_n + 1),$$

on voit que

(4) $S(\Lambda, 0)$, $S(\Lambda, +)$ et $S(\tilde{\Lambda}, -)$ sont les seules courbes de la forme $S(\Theta)$, dont la direction de minceur est α [remarques 2 et 3 (6.3.1) (A)].

Or, on sait déjà [(6.1.3) remarque (b)] que, pour tout α de cette forme, il existe effectivement trois courbes indéfinies limites de préévaluation distinctes ayant la même direction de minceur égale à α . Cela prouve que les courbes considérées dans (4) précédent coïncident avec celles décrites dans (b) de la remarque (6.1.3). Par suite, les courbes $S(\Lambda, 0)$, $S(\Lambda, +)$ et $S(\tilde{\Lambda}, -)$ sont des courbes de préévaluation.

Par ailleurs, si $\Lambda = (l_1, \dots, l_n ; n > 0)$ et $\xi \in \{-, 0, +\}$ sont tels que $l_n \neq 0$ si $\xi = -$, la suite Λ , les courbes $S(\Lambda, 0)$ et $S(\Lambda, +)$ s'obtiennent, comme précédemment à partir du développement en fraction négacontinue de $\alpha(\Lambda) > -1$, et $S(\Lambda, -)$ s'obtient d'un tel développement de $\alpha(\Lambda^*)$, où $\Lambda^* = (l_1, \dots, l_{n-1}, l_n - 1)$. Elles sont donc de préévaluation.

Si $\alpha = -1$, il y a deux courbes $S(\Lambda, \xi)$ dont la direction de minceur est α , à savoir

$$S(\emptyset, 0) \text{ et } S[(0), -].$$

Il y a exactement autant de courbes indéfinies limites de préévaluation de direction de minceur α , ce qui prouve que les deux courbes considérées sont de préévaluation.

(6.3.4) Théorème. L'ensemble $E(S)$ des points entiers de toute courbe $S = S(\Lambda, \Xi)$, où Λ et Ξ vérifient les conditions énoncées au début de (6.3.1), est une courbe indéfinie limite de préévaluation.

Supposons que $E(S)$ ne soit pas de préévaluation. Alors, il existe deux points entiers $P, Q \in S$ et une translation entière T tels que $T.P$ soit au-dessus de S et $T.Q$ soit au-dessous de S . Soient P' et Q' les points entiers de S ayant les mêmes projections horizontales que $T.P$ et $T.Q$ respectivement. Or, avec les notations déjà introduites [(6.2.1), (B)], il existe un entier i tel que $\varphi_i.S_{i-1}$ contienne tous les points P, Q, P' et Q' . Mais alors, si $T' = \varphi_i^{-1}T \varphi_i$ ce qui précède prouve que $T'S_{i-1}$ et S_{i-1} se traversent. Comme $S_{i-1} = S'_{i-1} + \tilde{S}_{i-1} + S''_{i-1}$, on a $S_{i-1} \subseteq \mathcal{P}(\Lambda_{i-1}) + \tilde{S}_{i-1} + \mathcal{P}(\Lambda_{i-1})$. Cette dernière courbe égale à $\mathcal{P}(\Lambda_{i-1}) + \mathcal{Q}(\Lambda_{i-1}) + \mathcal{P}(\Lambda_{i-1})$ ou à $3 \mathcal{P}(\Lambda_{i-1})$ selon que $\tilde{S}_{i-1}$ est égale à $\mathcal{Q}(\Lambda_{i-1})$ ou à $\mathcal{P}(\Lambda_{i-1})$. Dans tous les cas, cette courbe (et par conséquent S_{i-1} aussi) peut être prolongée par $S^* = S(\Lambda_{i-1}, -)$. Par suite, $T'S^*$ et S^* se traversent. Mais cela n'est pas possible, car $E(S^*)$ est de préévaluation [théorème (6.2.3)].

Remarque 1. Comme, d'après le théorème précédent, $S(\Lambda, \Xi)$ est de préévaluation, son épaisseur est ≤ 1 [(6.1), (B)] donc finie. Ce dernier résultat qui était annoncé dans [(6.2.1), (B), lemme 1] permet de supprimer, dans 2° du lemme rappelé, l'hypothèse $\text{Ep}(E(S)) < +\infty$.

Par conséquent,

1° $\alpha(\Lambda)$ est la direction de minceur de $E(S(\Lambda, \Xi))$, qui est irrationnelle donc,

2° $S(\Lambda, \Xi)$ ne peut pas être égale à une courbe $S(\Lambda', \Xi')$ si $\Lambda \neq \Lambda'$ ni à une courbe $S(\Lambda', \xi)$, si $\Lambda' = (l'_1, \dots, l'_{n-1})$, $\xi \in \{-, 0, +\}$ et $\xi = 0$ si $\Lambda' = \emptyset$.

(6.3.5) Proposition. Soient $\theta = (\Lambda, \Xi)$ et $\theta' = (\Lambda, \Xi)$ deux systèmes d'invariants avec $\Lambda = (l_1, \dots, l_n, \dots)$, $\Xi = (\xi_1, \dots, \xi_n, \dots)$ et $\Xi' = (\xi'_1, \dots, \xi'_n, \dots)$. Pour que les courbes $S(\theta)$ et $S(\theta')$ soient égales, il suffit que les termes de Ξ et Ξ' soient les mêmes à partir d'un certain rang.

En effet, si les termes de Ξ et Ξ' sont les mêmes à partir d'un certain rang, les courbes S_i ainsi que les applications $\varphi_i: S_{i-1} \rightarrow S_i$ déterminées par θ et θ' sont les mêmes à partir d'un certain rang, et il en sera de même pour leur limite inductive.

§ (6.4) - AUTRES APPLICATIONS DES FRACTIONS NEGACONTINUES.

(6.4.1) Soient $\Lambda = (1_1, \dots, 1_i) \neq \emptyset$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\Lambda)$ ($\mathfrak{B}$ commence au point 0). Si $d_i = 1_i + 2$, $\mathfrak{B}$ peut être considérée comme une partie de la courbe $S(\Lambda, 0)$ dont la direction de minceur est $\alpha = \alpha(\Lambda) = \cfrac{-1}{d_1 - \cfrac{1}{d_2 - \cfrac{1}{\ddots - \cfrac{1}{d_n}}}}$

[(6.3.1), (A) remarque 2]. Si $\frac{b_0}{a_0}, \frac{b_1}{a_1}, \dots, \frac{b_n}{a_n} = \alpha$ sont les réduites

successives (écrites sous formes irréductibles, et de dénominateurs $a_i > 0$) du développement précédent de $\alpha(\Lambda)$ en fraction négacontinue, et si

A_i ($i = 0, 1, \dots, n$) est la fin de la courbe $\mathfrak{B}_i = \mathfrak{B}(\Lambda_i)$ dont le début est placé au point 0, on sait [(6.3.1) démonstration de la remarque 2] que A_i est le point $(a_i, b_i) \in \mathbb{R}^2$ et que $h_\alpha(A_0) > h_\alpha(A_1) > \dots > h_\alpha(A_{n-1}) = \frac{1}{d}$, $h_\alpha(A_n) = 0$,

où $d = a_n$ est le dénominateur de $\alpha = \alpha(\Lambda)$. Soit $P = (p_1, p_2)$ un point entier quelconque de $\mathfrak{B}$ autre que A_n , autrement dit, p_1 est un entier tel que $0 \leq p_1 < d = a_n$. Comme $a_n > a_{n-1} > \dots > a_1 > a_0 = 1$, p_1 peut se mettre, d'une seule façon, sous la forme

$$(1) \quad p_1 = \eta_n a_{n-1} + \eta_{n-1} a_{n-2} + \dots + \eta_2 a_1 + \eta_1$$

où les η_i ($i = 1, 2, \dots, n$) sont des entiers positifs et tels que

$$0 \leq p_1 - \sum_{q=i}^n \eta_q a_{q-1} < a_i \quad (i = n, n-1, \dots, 1, 0),$$

ce qui prouve que P est l'extrémité de la courbe

$$\eta_n \mathfrak{Q}_{n-1} + \eta_{n-1} \mathfrak{Q}_{n-2} + \dots + \eta_2 \mathfrak{Q}_1 + \eta_1 \mathfrak{Q}_0$$

dont le début se trouve au point $\dot{O}$. Par suite, on a

$$h_\alpha(P) = \eta_n h_\alpha(A_{n-1}) + \eta_{n-1} h_\alpha(A_{n-2}) + \dots + \eta_2 h_\alpha(A_1) + \eta_1 h_\alpha(A_0) \geq 0.$$

Le point de $\mathfrak{Q}$ dont la α -hauteur est la plus petite (d'ailleurs égale à 0) étant $\dot{O}$ dont les η_i associés sont tous nuls. Cela étant, on a

Proposition. 1° Soit $S = S(\Lambda, \xi) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} S_i$ telle que $\Lambda = (l_1, \dots, l_i)$ et

(a) si $\Lambda \neq \emptyset$, on a $S_i = \mathfrak{Q}(\Lambda)$ dans les cas suivants :

α) $\xi = 0$ et i quelconque

β) $\xi = +$ et $i \neq 0$

γ) $\xi = -$ et $i = 0$,

et $S_i = \mathcal{P}(\Lambda)$ dans les autres cas.

(b) si $\Lambda = \emptyset$ (ξ prend seulement la valeur 0), on a $S_i = \mathcal{P}_0$ pour tout i .

Alors, la tangente inférieure L' de S passe par un des points terminaux de tout S_i qu'elle rencontre.

Ainsi, on place S en position canonique en plaçant au point $\dot{O}$ le début d'un S_i quelconque si $\xi = 0$, celui de S_1 si $\xi = +$ et celui de S_0 si $\xi = -1$.

2° Soit $S = S(\Lambda, E)$ telle que $\Lambda = (l_1, \dots, l_i, \dots ; i < +\infty)$ et $E = (\xi_1, \dots, \xi_i, \dots ; i < +\infty)$. Si la tangente inférieure L' de S passe par un point de S , on a $S = S(\Lambda, 0)$, où $0 = (\xi_1 = 0, \xi_2 = 0, \dots, \xi_i = 0, \dots)$.

Prouvons d'abord le 1°. Si $A_i = B_{i-1}$ et $B_i = A_{i+1}$ sont le début et la fin de S_i , on sait déjà [(6.3.1), (A) démonstration du lemme 2] que L' ne peut rencontrer S qu'en certains points de certains S_i tels que la pente de la droite $A_i B_i$ soit égale à la direction de minceur α de S . Mais alors, pour un tel S_i , L' doit passer par ses points de α -hauteur minimale ; si $\xi = +$ ou 0,

on a, $S_i = \mathfrak{L}(\Lambda)$ si $\Lambda \neq 0$ et $\mathcal{P}_0$ si $\Lambda = 0$, $\alpha = \alpha(\Lambda)$ et les points de α -hauteur minimale sont A_i et B_i ; si $\xi = -$ et $l_n \neq 0$ [ce que l'on peut supposer, sauf pour le cas exceptionnel $\Lambda = (l_1 = 0)$], on a $\alpha = \alpha(\Lambda^*)$ et $S_i = \mathcal{P}(\Lambda) = \mathfrak{L}(\Lambda^*)$ avec la même conclusion que plus haut.

Enfin, si $\Lambda = (l_1 = 0)$ et $\xi = -$, on a $S_i = \mathcal{P}(\Lambda) = \mathcal{P}_0$, sauf si $i = 0$ et L' rencontre les S_i telles que $i < 0$. Comme α est égale à la pente de la droite $A_i B_i$, qui est égale à $\dots 1$ (sauf si $i = 0$) L' passe encore par A_i et B_i .

Si $\xi = 0$, L' rencontre toutes les courbes S_i . Si $\xi = +$, L' rencontre la courbe S_i si $i < 0$ et ne la rencontre pas si $i > 0$. Et si $\xi = -$, L' rencontre la courbe S_i si $i > 0$ et ne la rencontre pas si $i < 0$.

La seule courbe à considérer autre que les S_i précédentes est S_0 , si $\xi = +$ ou $-$ (si $\xi = 0$ il n'y en a pas). Si $\xi = +$, L' rencontre la courbe S_0 en $B_0 = A_1$ et si $\xi = -$, L' la rencontre en $A_0 = B_{-1}$.

C'est le point qu'il faut transporter en O pour placer $S(\Lambda, +)$ [resp. $S(\Lambda, -)$] en position canonique. Quant à $S(\Lambda, 0)$, on la place en position canonique dès que l'on transporte en $\dot{O}$ un A_i quelconque.

Prouvons le 2°. On conserve les notations introduites au début de (B) dans (5.3.1). Si $\Xi = (0, 0, \dots, 0, \dots)$, on a, pour tout i ,

$S_i = \mathcal{P}_i(\Lambda) + \mathfrak{L}_i(\Lambda) + \mathcal{P}_i^*(\Lambda) \subseteq 3\mathfrak{L}_i(\Lambda)$. Soit B_i le début de la partie $\mathfrak{L}_i(\Lambda)$ de S_i on a $\varphi_i \cdot B_{i-1} = B_i$.

Il en résulte, d'abord, que pour tout i , $\varphi_i B_{i-1} = \varphi_{i+1}(\varphi_i \cdot B_{i-1}) = \varphi_{i+1} \cdot B_i$, donc tous les $\varphi_i \cdot B_{i-1}$ coïncident avec un même point B de $S = S(\Lambda, \Xi)$. Comme les courbes S_i ainsi que la courbe S sont définies à une translation entière près, on peut supposer, sans perte de généralité, que tous les points B_i ainsi que le point B coïncident avec le point $\dot{O}$, ce qui entraîne que toutes les

applications φ_i sont des identités et que $S(\Lambda, \Xi) = \bigcup_{i=0}^{+\infty} S_i$.

Cela étant, soient $d_i = l_i + 2$ et $\alpha_0 > \alpha_1 > \dots > \alpha_i > \dots$

les réduites successives de $\alpha(\Lambda) = \frac{-1}{d_1 - \frac{1}{d_2 - \dots}}$

On sait que $\alpha(\Lambda)$ est la limite, quand $i \rightarrow +\infty$, de la suite décroissante α_i , donc, pour tout i , on a $\alpha_i > \alpha(\Lambda)$; on a en outre, $\alpha_i = \alpha(\Lambda_i)$. Ainsi, la droite $L_j^!$ de pente α_j passant par le point $\dot{O}$ rencontre la courbe $3\mathfrak{Q}_j(\Lambda) \supseteq S_j$ seulement aux points terminaux des parties $\mathfrak{Q}_j(\Lambda)$, le reste de la courbe étant au-dessus de $L_j^!$. Or, si $i < j$, la courbe $S_i \subseteq S_j$ ne contient qu'un seul de ces points terminaux, à savoir $\dot{O}$, car déjà S_j ne contient que le début de la première courbe $\mathfrak{Q}_j(\Lambda)$ et la fin de la troisième. Et la partie $\tilde{S}_{j-1} + S_{j-1}'' = \mathfrak{Q}_{j-1}(\Lambda) + \mathfrak{T}_{j-1}'(\Lambda)$ de S_{j-1} , qui commence au point $\dot{O}$, est une partie propre de $\tilde{S}_j = \mathfrak{Q}_j(\Lambda) = (l_j+1)\mathfrak{Q}_{j-1}(\Lambda) + \mathfrak{T}_{j-1}(\Lambda)$.

Ainsi, si $j > i$, tous les points de S_i , sauf $\dot{O}$ sont au-dessus de $L_j^!$. Soit $L^{*!}$ la droite de pente $\alpha = \alpha(\Lambda)$ (qui est irrationnelle) passant par $\dot{O}$. Comme tout point de $L^{*!}$ est la limite, quand $j \rightarrow +\infty$, de points convenables des $L_j^!$ (par exemple de même abscisse), on voit que, quel que soit i , tout point de S_i est sur la droite $L^{*!}$ ou est au-dessus de cette droite. Comme S_i est une ligne polygonale, un point de S_i distinct de $\dot{O}$ ne peut se trouver sur $L^{*!}$ que si un sommet de S_i distinct de $\dot{O}$ s'y trouve.

Or, les sommets de S_i sont des points entiers de $\mathbb{R}^2$, tandis que la pente de $L^{*!}$ étant irrationnelle, au plus, un point entier peut se trouver sur cette droite. Ce qui prouve que $\dot{O}$ est le seul point de S_i se trouvant sur $L^{*!}$.

Par conséquent, tout point $P \in S(\Lambda, \mathbb{E}) = \bigcup_i S_i$ tel que $P \neq \dot{O}$ est au-dessus de $L^{*!}$ et $L^{*!}$ coïncide avec la tangente inférieure L' de $S(\Lambda, \mathbb{E})$, qui passe par un point entier.

Comme ce point entier est 0, la manière précédente de placer les S_i met $S(\Lambda, \Xi)$ en position canonique.

On peut montrer que : pour que la tangente supérieure de $S(\Lambda, \Xi)$ passe par un point entier, il faut et il suffit que l'on ait

$$\Xi = (1_1, 1_2, \dots, 1_i, \dots ; i < +\infty).$$

Comme $S = S(\Lambda, 0)$ est une courbe indéfinie limite de préévaluation, qui est la juxtaposition de courbes égales à $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(\Lambda)$, elle est périodique de période minimale $\Pi = (a_n, b_n)$, de direction de minceur $\alpha = \frac{b_n}{a_n}$. Il résulte de

$$(6.1.2) \text{ (remarque 1, 2°) que } Ep(S) = Ep_{\alpha}(S) = Ep_{\alpha}(\mathfrak{S}) = \frac{d-1}{d} \text{ avec } d = a_n,$$

et que les α -hauteurs de d points entiers $P = (p_1, j(p_1))$ ($p_1 = 0, 1, \dots, d-1$) de $\mathfrak{S}$ sont toutes différentes et constituent l'ensemble $H_d = \{0, \frac{1}{d}, \dots, \frac{d-1}{d}\}$ des fractions rationnelles h admettant d comme dénominateur et telles que $0 \leq h < 1$.

Cela montre, en particulier, que les $h_i = h_{\alpha}(A_i)$ sont parmi ces fractions. Soit

$$p_1 = \sum_{i=1}^n \eta_i a_{i-1}$$

la représentation [(1), (6.3.1)] de la première coordonnée d'un des d points P précédents, soit M_i l'ensemble des p_1 précédents tels que

$$p_1 = \sum_{j=i+1}^n \eta_j a_{j-1}, \text{ autrement dit, tels que } \eta_j = 0 \text{ si } j \leq i. \text{ On a}$$

$\{0\} = M_n \subset \dots \subset M_1 \subset M_0 = \{0, 1, 2, \dots, d-1\}$ et soit m_i le nombre d'éléments de M_i (donc $m_n = 1$ et $m_0 = d$). On a

Théorème : 1° Quand la première coordonnée p_1 des points $P = (p_1, p_2) \in \mathfrak{S} = \mathfrak{S}(\Lambda)$ parcourt M_i , leurs α -hauteurs $h_{\alpha}(P)$ parcourent l'ensemble

$$H_a^{(m_i)} = \left\{0, \frac{1}{d}, \dots, \frac{m_i - 1}{d}\right\} \text{ des fractions rationnelles } h \text{ de dénominateur } d$$

telles que $0 \leq h < \frac{m_i}{d}$.

2° $h_\alpha(A_{i-1}) = \frac{m_i}{d}$, où A_{i-1} désigne la fin de la courbe $\mathfrak{Q}_{i-1}(\Lambda)$ qui commence au point $\dot{O}$.

Pour une valeur donnée de i , le 2° est une conséquence de 1°. En effet, si $p_1 \notin M_i$, il existe un j tel que $0 \leq j \leq i$ et $\eta_j \geq 1$, donc $h_\alpha(P) \geq \eta_j h_\alpha(A_{j-1}) \geq h_\alpha(A_{i-1})$. Donc $h_\alpha(A_{i-1})$ est la plus petite fraction rationnelle non négative h de dénominateur d qui n'appartienne pas à $H_d^{(m_i)}$, autrement dit, ne satisfaisant pas à l'inégalité $0 \leq h < \frac{m_i}{d}$. Il est clair qu'une telle fraction rationnelle h est égale à $\frac{m_i}{d}$.

Pour $i = n$, le 1° est évident, car $M_n = \{O\}$, donc $m_n = 1$, en outre on a, $P_o = (O, O)$ et $h_\alpha(P_o) = 0 = \frac{0}{d}$. Ainsi $\{h_\alpha(P_{p_1}) ; p_1 \in M_n\}$ est bien égal à $H_d^{(m_n)}$.

Supposons que le 1° soit vrai pour $i+1$ et montrons qu'il est alors vrai pour $i = 0, 1, \dots, n-1$. D'abord, en vertu de l'hypothèse faite, on a

$$\{h_\alpha(P_{p_1}) ; p_1 \in M_{i+1}\} = H_d^{(m_{i+1})} \text{ et } h_\alpha(A_i) = \frac{m_{i+1}}{d}.$$

Considérons un $p_1 \in M_{i+1}$ tel que $p_1 = \eta_n a_{n-1} + \dots + \eta_{i+2} a_{i+1}$. Alors P_{p_1} est la fin de $S_{p_1} = \eta_n \mathfrak{Q}_{n-1}(\Lambda) + \dots + \eta_{i+2} \mathfrak{Q}_{i+1}$, qui est le début de la courbe $\mathfrak{Q}(\Lambda)$ commençant au point $\dot{O}$. Il est clair que P_{p_1} est un des points qui

réalise la partition de $\mathfrak{Q}(\Lambda) = \sum_j S_j^{(i+1)}$ de $\mathfrak{Q}(\Lambda)$ en courbes de la forme

$\mathfrak{Q}_{i+1}(\Lambda)$ et $\mathcal{T}_{i+1}(\Lambda)$. Soient $M_{i+1}^{(1)}$ et $M_{i+1}^{(p)}$ les sous-ensembles de M_{i+1} formés des $p_1 \in M_{i+1}$ tels que P_{p_1} soit suivi dans la partition précédente par une courbe

$S_j^{(i+1)}$ qui soit de la forme $\mathfrak{Q}_{i+1}(\Lambda)$, $\mathcal{T}_{i+1}(\Lambda)$ respectivement, et soient

$m_{i+1}^{(1)}$, $m_{i+1}^{(p)}$ respectivement le nombre d'éléments de ces ensembles.

Supposons maintenant que $p_1 \in M_i$, donc que

$$(1) \quad p_1 = \eta_h a_{n-1} + \dots + \eta_{i+1} a_i,$$

et posons

$$(2) \quad \bar{p}_1 = \eta_h a_{n-1} + \dots + \eta_{i+2} a_{i+1} \in M_{i+1}.$$

Soit $M_{i, \bar{p}_1}$ l'ensemble des $p_1 \in M_{i+1}$ tels que le $\bar{p}_1$ correspondant ait une valeur fixée. Alors, si $\bar{p}_1 \in M_{i+1}^{(1)}$ les η_{i+1} [(1) précédent] parcourent l'ensemble $\{0, 1, \dots, l_{i+1} + 1\}$ quand p_1 parcourt $M_{i, \bar{p}_1}$: en effet, on a $a_{i+1} = (l_{i+1} + 1)a_i + \bar{a}_i < (l_{i+1} + 2)a_i$. Par contre, si $\bar{p}_1 \in M_{i+1}^{(P)}$ les η_{i+1} ne parcourent, quand p_1 parcourt $M_{i, \bar{p}_1}$, que l'ensemble $\{0, 1, \dots, l_{i+1}\}$. Par suite, si l'on considère les éléments $p_1 = \bar{p}_1 + \eta_{i+1} a_i \in M_i$ ($\bar{p}_1 \in M_{i+1}$) avec η_{i+1} fixé, $\bar{p}_1$ parcourt l'ensemble M_{i+1} ou $M_{i+1}^{(1)}$ ou $\emptyset$ quand p_1 parcourt l'ensemble de ces éléments, selon que $0 \leq \eta_{i+1} \leq l_{i+1}$ ou $\eta_{i+1} = l_{i+1} + 1$ ou encore

$$\eta_i > l_{i+1} + 1. \text{ Mais, } h_{\alpha}(P_{p_1}) = h_{\alpha}(P_{\bar{p}_1}) + \eta_{i+1} h_{\alpha}(A_i) = h_{\alpha}(P_{\bar{p}_1}) + \eta_{i+1} \frac{m_{i+1}}{d}.$$

Donc, quand p_1 parcourt M_i avec η_i fixé tel que $0 \leq \eta_i \leq l_i$, le nombre

$h_{\alpha}(P_{p_1})$ parcourt l'ensemble des $\eta_{i+1} \frac{m_{i+1}}{d} + H_d^{m_{i+1}}$, autrement dit, l'ensemble de toutes les fractions $h = \frac{c}{d}$ telles que $\eta_{i+1} m_{i+1} \leq c < (\eta_{i+1} + 1)m_{i+1}$. Donc,

quand $p_1 \in M_i$ parcourt toutes les valeurs telles que $0 \leq \eta_{i+1} \leq l_{i+1}$, les $h_{\alpha}(P_{p_1})$ correspondants parcourent l'ensemble $\left\{ \frac{c}{d} ; 0 \leq c < (l_{i+1} + 1)m_{i+1} \right\}$

Et quand $\eta_{i+1} = l_{i+1} + 1$, $\bar{p}_1$ ne peut parcourir qu'une partie propre $M_{i+1}^{(1)}$ de M_{i+1} , donc, les $h_{\alpha}(P_{p_1})$ correspondants parcourent une partie propre de l'ensemble $\left\{ \frac{c}{d} ; (l_{i+1} + 1)m_{i+1} \leq c < (l_{i+1} + 2)m_{i+1} \right\}$. Or, $h_{\alpha}(A_{i-1})$ est le minimum des $h_{\alpha}(P_{p_1})$ avec $p_1 \notin M_i$, c'est donc la plus petite fraction $\frac{c}{d}$, qui n'appartient pas à $\left\{ h_{\alpha}(P_{p_1}) ; p_1 \in M_i \right\}$. Donc, on a

$$(l_{i+1} + 1) \frac{m_{i+1}}{d} \leq h_{\alpha}(A_{i-1}) < (l_{i+1} + 2) \frac{m_{i+1}}{d}.$$

Supposons qu'il existe un $p_1 \in M_i$ tel que $h_{\alpha}(P_{p_1}) > h_{\alpha}(A_{i-1})$. Alors, on a $h_{\alpha}(P_{p_1}) - h_{\alpha}(A_{i-1}) = \frac{c}{d}$ avec $0 < c < m_{i+1}$. Mais alors il existe un $\bar{p}_1 \in M_{i+1}$ tel que $h_{\alpha}(P_{\bar{p}_1}) = \frac{c}{d}$.

Supposons que $\bar{p}_1 = \bar{\eta}_h a_{n-1} + \dots + \bar{\eta}_{i+2} a_{i+1}$ et posons

$$y_1 = \bar{p}_1 + a_{i-1} = \bar{\eta}_h a_{n-1} + \bar{\eta}_{h-1} a_{n-2} + \dots + \bar{\eta}_{i+2} a_{i+1} + 0 a_i + 1 a_{i-1}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \text{on a, } h_{\alpha}(P_{y_1}) &= \bar{\eta}_h h_{\alpha}(A_{n-1}) + \bar{\eta}_{h-1} h_{\alpha}(A_{n-2}) + \dots + \bar{\eta}_{i+2} h_{\alpha}(A_{i+1}) + \\ &+ h_{\alpha}(A_{i-1}) = h_{\alpha}(P_{\bar{p}_1}) + h_{\alpha}(A_{i-1}) = h_{\alpha}(P_{p_1}). \end{aligned}$$

Or, il est clair que $0 < y_1 < d$ et $y_1 \notin M_i$, donc y_1 n'est pas égal à $p_1 \in M_i$. Mais si $p_1 \neq y_1$, où $0 \leq p_1, y_1 < d$, on doit avoir $h_{\alpha}(P_{p_1}) \neq h_{\alpha}(P_{y_1})$. Ainsi, il ne peut exister aucun $p_1 \in M_i$ tel que $h_{\alpha}(P_{p_1}) > h_{\alpha}(A_{i-1})$, ce qui montre que la plus petite fraction $\frac{c}{d}$ n'appartenant pas à l'ensemble $\{h_{\alpha}(P_{p_1}) ; p_1 \in M_i\}$

est supérieure à tous les éléments de cet ensemble. Si on la désigne par

$$\frac{m_i}{d}, \text{ on a } M_i = H_d^{(m_i)}, \text{ ce qui achève la démonstration du théorème.}$$

Lemme 1. On conserve les données et les notations précédentes. On a

$$m_n = 1, m_{n-1} = d_n = l_n + 2 \text{ et de façon générale}$$

$$m_i = d_{i+1} m_{i+1} - m_{i+2}$$

On a déjà vu que $M_n = \{0\}$. D'autre part, si $p_1 = \eta_h a_{n-1}$, η_h peut prendre les valeurs $0, 1, \dots, l_n + 1$, c'est-à-dire, $l_n + 2 = d_n$ valeurs. Supposons que $i \leq n-2$. Si $\bar{p}_1 \in M_{i+1}^{(1)}$, l'entier η_{i+1} dans $p_1 = \bar{p}_1 + \eta_{i+1} a_i \in M_i$ peut prendre les $l_{i+2} = d_i$ valeurs : $0, 1, \dots, l_{i+1} + 1$ et il est clair que P_{p_1} est suivi de $\mathcal{Q}_i(\Lambda)$ ou $\mathcal{P}_i(\Lambda)$ selon que $\eta_{i+1} \leq l_{i+1}$ ou $\eta_{i+1} = l_{i+1} + 1$. De même,

si $\bar{p}_1 \in M_{i+1}^{(p)}$, η_{i+1} peut prendre les $l_{i+1} + 1$ valeurs : $0, 1, \dots, l_{i+1}$ et P_{p_1} est suivi de $\mathfrak{L}_i(\Lambda)$ ou de $\mathfrak{P}_i(\Lambda)$ selon que $\eta_{i+1} < l_i$ ou $\eta_{i+1} = l_i$. Par suite,

$$m_i^{(1)} = m_{i+1}^{(1)} (l_{i+1} + 1) + m_{i+1}^{(p)} l_{i+1} = \left[m_{i+1}^{(1)} + m_{i+1}^{(p)} \right] (d_{i+1} - 1) - m_{i+1}^{(p)} =$$

$$= (d_{i+1} - 1) m_{i+1} - m_{i+1}^{(p)}, \text{ et}$$

$$m_i^{(p)} = m_{i+1}^{(1)} + m_{i+1}^{(p)} = m_{i+1},$$

d'où, $m_i = m_i^{(1)} + m_i^{(p)} = \left[(d_{i+1} - 1) m_{i+1} - m_{i+1}^{(p)} \right] + m_{i+1} = d_{i+1} m_{i+1} - m_{i+2}$, car $m_{i+1}^{(p)} = m_{i+2}$. Ce qu'il fallait prouver.

Remarque. Si Δ_i est le dénominateur de la i -ième réduite de la fraction

négacontinue
$$\beta = \frac{-1}{d_n - \frac{1}{d_{n-1} - \frac{1}{\ddots - \frac{1}{d_1}}}}$$

on a, $m_i = L_{n-i}$.

En effet, m_{n-i} satisfait aux mêmes conditions initiales :

$m_{n-0} = 1$, $m_{n-1} = d_n$ et à la même relation de récurrence que Δ_i .

Lemme 2. On conserve toujours les notations précédentes. On a,

$$h_\alpha(A_0) = -\alpha, h_\alpha(A_1) = d_1 h_\alpha(A_0) - 1 = -\alpha d_1 - 1 \text{ et si } i \geq 2,$$

$$h_\alpha(A_i) = d_i h_\alpha(A_{i-1}) - h_\alpha(A_{i-2}).$$

En effet, on a d'abord, $A_0 = (1, 0)$, donc $h_\alpha(A_0) = -\alpha$. Ensuite, on a

$m_0 = d_1 m_1 - m_2$, donc $m_2 = d_1 m_1 - m_0$. Comme $m_0 = d$, on aura

$$h_\alpha(A_1) = \frac{m_2}{d} = d_1 \frac{m_1}{d} - \frac{d}{d} = d_1 h_\alpha(A_0) - 1. \text{ Enfin, si } i \geq 3, \text{ on a}$$

$$m_{i-1} = d_i m_i - m_{i+1} \text{ donc, } m_{i+1} = d_i m_i - m_{i-1}, \text{ et}$$

$$h_\alpha(A_i) = \frac{m_{i+1}}{d} = d_i \frac{m_i}{d} - \frac{m_{i-1}}{d} = d_i h_\alpha(A_{i-1}) - h_\alpha(A_{i-2}). \text{ Ce qui achève}$$

la démonstration du lemme.

(6.4.2) Soient $\Lambda = (1_1, \dots, 1_i, \dots ; i < M)$ et $\Xi = 0 = (0, 0, \dots, 0, \dots)$. Soient S la courbe $S(\Lambda, 0)$ en position canonique et A_i la fin de la courbe $\mathfrak{S}_i(\Lambda) = \mathfrak{S}(\Lambda_i)$ commençant au point $\dot{O}$. Si $\alpha_i = \alpha(\Lambda_i)$ est la pente de la droite $\dot{O} A_i$, et $\alpha = \lim_{i \rightarrow +\infty} \alpha_i$, on a pour tout $P \in \mathbb{R}^2$, $h_\alpha(P) = \lim_{i \rightarrow +\infty} h_{\alpha_i}(P)$ [ét, d'ailleurs, pour

un p fixé d'abscisse positive, $h_{\alpha_i}(P)$ est une fonction croissante de i]. En

particulier, on a, $h_\alpha(A_0) = \lim_{i \rightarrow +\infty} (-\alpha_i) = -\alpha$, $h_\alpha(A_1) = \lim_{i \rightarrow +\infty} h_{\alpha_i}(A_1) =$

$= \lim_{i \rightarrow +\infty} [-d_1 \alpha_i - 1] = -d_1 \alpha - 1$. En outre, si $i \geq 2$, on a,

$$h_\alpha(A_i) = \lim_{j \rightarrow +\infty} (A_i) = \lim_{j \rightarrow +\infty} [d_{i-1} h_{\alpha_j}(A_{i-1}) - h_{\alpha_j}(A_{i-2})] = d_{i-1} h_\alpha(A_{i-1}) - h_\alpha(A_{i-2}).$$

Ainsi,

(1) Le lemme 2 précédent [(6.4.1)] est encore vrai quand Λ est infini et $\Xi = (0, \dots, 0, \dots)$.

Désignons toujours par $\frac{b_i}{a_i}$ la i -ième réduite (mise sous forme irréductible à dénominateur strictement positif) du développement négacontinu de la direction de minceur $\alpha(\Lambda)$ de la courbe précédente $S = S(\Lambda, 0)$. Alors, si $p_1 < a_n$ et si $n \leq j$, on peut considérer, en se servant de la courbe $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(\Lambda_j)$, le développement

$$(1) p_1 = \eta_n a_{n-1} + \eta_{n-1} a_{n-2} + \dots + \eta_1 a_0$$

[(1), (6.4.1)]. Ce développement ne dépend pas du choix de $j \geq n$. Soit $M_i^{(j)}$

l'ensemble des p_1 de la forme précédente, avec $n \leq j$ quelconque, tels que

$$\eta_1 = \eta_2 = \dots = \eta_i = 0.$$

On sait déjà [fin de la démonstration du théorème (6.3.1)] que, pour tout $x_1 \in M_i^{(j)}$, on a

$$h_{\alpha_j}(A_{i-1}) > h_{\alpha_j}(P_{p_1}) = \eta_n h_{\alpha_j}(A_{n-1}) + \eta_{n-1} h_{\alpha_j}(A_{n-2}) + \dots + \eta_{i+1} h_{\alpha_j}(A_i).$$

En faisant j vers $+\infty$, on obtient

$h_{\alpha}(A_{i-1}) \geq \eta_h h_{\alpha}(A_{n-1}) + \eta_{h-1} h_{\alpha}(A_{n-2}) + \dots + \eta_{i+1} h_{\alpha}(A_i)$. Cela pour le développement précédent [(1)] et pour tout $p_1 \in M_i = \bigcup_{j>i} M_i^{(j)}$. Mais si $p_1 \in M_i$

est tel que $p_1 < a_n$, on a encore $x_1 + a_n \in M_i$, donc

$h_{\alpha}(A_{i-1}) \geq h_{\alpha}(P_{x_1+a_n}) = h_{\alpha}(P_{p_1}) + h_{\alpha}(A_n) > h_{\alpha}(P_{p_1})$. Ainsi, on a

$$(2) \quad h_{\alpha}(A_{i-1}) > \eta_h h_{\alpha}(A_{n-1}) + \eta_{h-1} h_{\alpha}(A_{n-2}) + \dots + \eta_{i+1} h_{\alpha}(A_i).$$

Considérons maintenant la courbe $S = S(\Lambda, \Xi)$, où Λ est infini et Ξ est aussi infini mais cette fois arbitraire, vérifiant uniquement les conditions de sa définition [au début de (6.3.1)]. En conservant les notations introduites lors de la définition de cette courbe [(6.3.1), (B)], plaçons-la de manière que $\Phi_1 \cdot B_0 = \dot{O}$. Soient $\alpha = \alpha(\Lambda)$. On note $L'_{\alpha,i}$ et $L''_{\alpha,i}$ les α -tangentes inférieure et supérieure à la courbe $\Phi_{i+1} \cdot \tilde{S}_i = \mathfrak{B}(\Lambda_i)$ ou $\mathfrak{J}_i(\Lambda) = \mathfrak{B}(\Lambda_i^*)$. Alors, on a

$$h(L''_{\alpha,i}) - h(L'_{\alpha,i}) = \text{Ep}_{\alpha}(\tilde{S}_i) \geq \text{Ep}(\tilde{S}_i) = 1 - \frac{1}{a_i} \text{ ou } 1 - \frac{1}{\bar{a}_i}.$$

Donc, quand $i \rightarrow +\infty$, $h(L''_{\alpha,i}) - h(L'_{\alpha,i}) \rightarrow 1$, car a_i et $\bar{a}_i$ tendent tous les deux vers $+\infty$ quand $i \rightarrow +\infty$. Par suite, si L' et L'' sont les tangentes inférieure et supérieure à S , donc, $h(L'') - h(L') = \text{Ep}(S) = 1$, on aura $h(L'_{\alpha,i}) \rightarrow h(L')$ quand $i \rightarrow +\infty$, car on a $h(L'') \geq h(L''_{\alpha,i}) > h(L'_{\alpha,i}) \geq h(L')$, $h(L'') - h(L') = 1$ et on vient de voir que $h(L''_{\alpha,i}) - h(L'_{\alpha,i}) \rightarrow 1$ quand $i \rightarrow +\infty$. Or, le point de $\tilde{S}_i$ dont la α -hauteur est minimale est B_i , donc $h(L'_{\alpha,i}) = h_{\alpha}(\Phi_{i+1} \cdot B_i)$. Par suite,

$$h(L') = \sum_{i=1}^{+\infty} [h_{\alpha}(\Phi_{i+1} \cdot B_i) - h_{\alpha}(\Phi_i \cdot B_{i-1})]. \text{ Or, } \Phi_{i+1} \cdot B_i \text{ et } \Phi_i \cdot B_{i-1} = \Phi_{i+1}(\varphi_i \cdot B_{i-1})$$

sont les translatées par Φ_{i+1} de B_i de $\varphi_i \cdot B_{i-1}$ respectivement. Donc,

$h_{\alpha}(\Phi_{i+1} \cdot B_i) - h_{\alpha}(\Phi_i \cdot B_{i-1}) = h_{\alpha}(B_i) - h_{\alpha}(\varphi_i \cdot B_{i-1})$. Or, $\varphi_i \cdot B_{i-1}$ est la fin de la partie de $\tilde{S}_i$ de la forme $\xi_i \mathfrak{B}(\Lambda_{i-1})$ ou $(\xi_i - 1) \mathfrak{B}(\Lambda_{i-1})$ selon que $\tilde{S}_i = \mathfrak{B}(\Lambda_i)$ ou que

$\tilde{S}_i = \mathcal{P}(\Lambda_i)$, autrement dit, selon que $\xi_{i+1} < l_{i+1} + 1$ ou que $\xi_{i+1} = l_{i+1} + 1$.

Il en résulte que $h_\alpha(\tilde{\Phi}_i \cdot B_{i-1}) = h_\alpha(B_i) + \xi_i h_\alpha(A_{i-1})$, où $h_\alpha(B_i) + (\xi_i - 1)h_\alpha(A_{i-1})$ selon que $\xi_{i+1} < l_i + 1$ ou $\xi_{i+1} = l_i + 1$. Donc, on a finalement

$$(3) \quad h(L') = - \sum_{i=0}^{+\infty} \xi_i h_\alpha(A_{i-1}) + \sum_{i=0}^{+\infty} h_\alpha(A_{i-1}) \leq 0$$

(6.4.3) On conserve les données et les notations de (6.3.2).

Soit $\Lambda = (l_i ; i < +\infty)$, où les l_i sont des entiers non-négatifs qui ne sont pas asymptotiquement = 0, et soient $\Xi = (\xi_i ; i < +\infty)$,

$\Xi^* = (\xi_i^* ; i < +\infty)$, où les ξ_i , ξ_i^* sont des entiers tels que

a) $0 \leq \xi_i$, $\xi_i^* \leq l_i + 1$;

b) ξ_i (resp. ξ_i^*) est > 0 si ξ_{i+1} (resp. ξ_{i+1}^*) est égal à $l_{i+1} + 1$.

On dira que Ξ et Ξ^* sont asymptotiquement égaux si, à partir d'un certain rang, on a $\xi_i = \xi_i^*$. On rappelle que 0 désigne la suite $(\xi_i ; i < +\infty)$ telle que tout ξ_i soit = 0, et on note $\Lambda + 1$, la suite $(\xi_i ; i < +\infty)$ telle que tout ξ_i soit = $l_i + 1$. On a

Théorème. $S(\Lambda, \Xi) = S(\Lambda, \Xi^*)$ si, et seulement si ou bien Ξ et Ξ^* sont asymptotiquement égaux, ou bien l'une des deux suites Ξ , Ξ^* est asymptotiquement égale à 0, tandis que l'autre l'est à $\Lambda + 1$.

On a, $S = S(\Lambda, \Xi) = \varinjlim (S_i ; \varphi_{j,i})$, où $S_i = S'_i + \tilde{S}_i + S''_i$ telle que $S'_i = \mathcal{P}_i(\Lambda)$, $S''_i = \mathcal{P}'_i(\Lambda)$ et $\tilde{S}_i = \mathcal{B}_i(\Lambda)$ ou $\mathcal{P}_i(\Lambda)$ selon que $\xi_{i+1} \leq l_{i+1}$ ou $\xi_{i+1} = l_{i+1} + 1$ et où, si $j > i$, $\varphi_{j,i} = \varphi_{j-1}\varphi_{j-2}\cdots\varphi_i$, φ_i étant la translation $S_{i-1} \rightarrow S_i$, qui applique le début de $\tilde{S}_{i-1}$ sur celui de $\tilde{S}_i$ [(6.2.1) début de (B)]. Soit Φ_i l'application canonique de S_i dans S induite par le système inductif $\varphi_{j,i}$. Alors, si l'on identifie S_i et $\Phi_i S_i \subset S$ (ce que l'on peut faire car les φ_i , donc les $\varphi_{j,i}$ sont des injections), S devient la limite

inductive du système $(\Phi_i S_i, \varphi_{j,i} = \text{identité})$. On peut donc supposer que S est la limite inductive des courbes emboîtées $S_1 \subset S_2 \subset \dots \subset S_i \subset \dots$ de la forme indiquée plus haut, avec $\varphi_1 = \text{identité}$, autrement dit, on peut supposer que

$$S = \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i.$$

De même, on peut supposer que $S^* = S(\Lambda, E^*)$ est la réunion d'une famille de ses sous-courbes emboîtées $S_1^* \subset S_2^* \subset \dots \subset S_i^* \subset \dots$, où $S_i^* = S_i^{*'} + \tilde{S}_i^* + S_i^{*''}$, avec $S_i^{*'} = \mathcal{P}_i(\Lambda)$, $S_i^{*''} = \mathcal{P}'_i(\Lambda)$ et $\tilde{S}_i^* = \mathcal{Q}_i(\Lambda)$ ou $\mathcal{P}_i(\Lambda)$ selon que $\xi_{i+1} \leq l_{i+1}$ ou $\xi_{i+1} = l_{i+1} + 1$, les courbes S_i^* étant emboîtées de manière que le début de $\tilde{S}_{i-1}^*$ coïncide avec la fin de $(l_i + 1 - \xi_i^*) \mathcal{Q}_{i-1}(\Lambda) + \mathcal{P}_{i-1}$ dans $\tilde{S}_i^*$.

Supposons que $S = S(\Lambda, E) = S^* = S(\Lambda, E^*)$. En effectuant, au besoin, une translation de S^* de manière à la faire coïncider avec S , on peut supposer que S est la réunion de chacune des deux familles $\{S_i\}$, $\{S_i^*\}$ décrites plus haut. Soient A_i, B_i, C_i (resp. A_i^*, B_i^*, C_i^*) les débuts des courbes $S_i^{'}$, $\tilde{S}_i^*$, $S_i^{''}$ (resp. $S_i^{*{'}}$, $\tilde{S}_i^{*{'}}$, $S_i^{*{''}}$) dans $S_i = S_i^{'}$ + $\tilde{S}_i^*$ + $S_i^{''}$ (resp. $S_i^* = S_i^{*{'}}$ + $\tilde{S}_i^{*{'}}$ + $S_i^{*{''}}$), D_i (resp. D_i^*) la fin de $S_i^{''}$ (resp. $S_i^{*{''}}$) et $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ (resp. $\alpha_i^*, \beta_i^*, \gamma_i^*, \delta_i^*$) les abscisses des points A_i, B_i, C_i, D_i (resp. $A_i^*, B_i^*, C_i^*, D_i^*$). Posons (en changeant, si nécessaire, les notations)

$$\beta_1 \leq \beta_1^* \quad \text{et} \quad u = \beta_1^* - \beta_1$$

On a $\beta_i - \alpha_i = \beta_i^* - \alpha_i^* = \bar{a}_i$ [car $S_i^{'} = S_i^{*{'}} = \mathcal{P}_i(\Lambda)$] et $\delta_i - \gamma_i = \delta_i^* - \gamma_i^* = \bar{a}_i - 1$ [car $S_i^{''} = S_i^{*{''}} = \mathcal{P}'_i(\Lambda)$]. D'autre part, on a $\bar{a}_i \leq \gamma_i - \beta_i$, $\gamma_i^* - \beta_i^* \leq a_i$ [car $\tilde{S}_i, \tilde{S}_i^*$ sont égales chacune à une des courbes $\mathcal{Q}_i(\Lambda), \mathcal{P}_i(\Lambda)$]. Par suite, on a, $\beta_1 - \alpha_i^* = (\beta_1 - u) - \alpha_i^* = (\beta_1^* - \alpha_i^*) - u \geq (\beta_i^* - \alpha_i^*) - u = \bar{a}_i - u > 0$ si $\bar{a}_i > u$.

Donc, si $\bar{a}_i > u$, on a $B_i \in S_i^{*'} + \tilde{S}_i^*$. Remarquons que si $\tilde{S}_i^* \cap \tilde{S}_i \neq \emptyset$, on aura aussi $\tilde{S}_j^* \cap \tilde{S}_j \supseteq \tilde{S}_i^* \cap \tilde{S}_i \neq \emptyset$ si $j > i$. Donc, ou bien $\tilde{S}_i^* \cap \tilde{S}_i$ est toujours vide, ou bien $\tilde{S}_i^* \cap \tilde{S}_i \neq \emptyset$ à partir d'un certain rang. Si $\tilde{S}_i^* \cap \tilde{S}_i = \emptyset$, on a $\beta_i < \gamma_i < \beta_i^* < \gamma_i^*$, car, par hypothèse, $\beta_1 \in [\beta_i, \gamma_i]$ est au plus égal à $\beta_i^* \in [\beta_i^*, \gamma_i^*]$.

Montrons que cela n'est pas possible à partir d'un certain rang.

D'abord, l'hypothèse " $\tilde{S}_i^* \cap \tilde{S}_i = \emptyset$ à partir d'un certain rang" entraîne

$$0 < \beta_i^* - \gamma_i < \beta_1^* - \beta_1 = u \text{ (d'après ce qui précède).}$$

Il en résulte que $\delta_i - \beta_i^* = (\delta_i - \gamma_i) - (\beta_i^* - \gamma_i) \geq (\bar{a}_i - 1) - u \geq 0$, donc $B_i^* \in S_i$. Soit $\alpha = \alpha(\Lambda_i)$. On sait déjà [(6.2.1) remarque 2 et proposition (6.3.1)] que B_i est un point de α -hauteur minimale de $S_i^!$, que C_i en est un de S_i'' et de $\tilde{S}_i$ et que $h_\alpha(B_i) > h_\alpha(C_i)$ ou $h_\alpha(B_i) = h_\alpha(C_i)$ selon que $\tilde{S}_i = \mathcal{P}_i(\Lambda)$ ou $\tilde{S}_i = \mathcal{L}_i(\Lambda)$; de plus, on a la même situation sur S_i^* . Comme $B_1 \in S^{*'}$, on a aussi $C_i \in S^{*'}$ (car $\beta_1 \leq \gamma_i < \beta_i^*$), donc $h_\alpha(C_i) > h_\alpha(B_i^*)$. Mais on a aussi $B_i^* \in S_i''$, donc, $h_\alpha(B_i^*) > h_\alpha(C_i)$, ce qui contredit $h_\alpha(C_i) > h_\alpha(B_i^*)$, obtenue précédemment, et qui prouve que l'on n'a pas $\tilde{S}_i \cap \tilde{S}_i^* = \emptyset$ à partir d'un certain rang, si $\bar{a}_i > u$.

Par conséquent, à partir d'un certain rang, $\gamma_i \geq \beta_i^*$.

Si $\tilde{S}_i = \tilde{S}_i^*$ (à une translation près), on a $\gamma_i - \beta_i = \gamma_i^* - \beta_i^*$, donc,

$\beta_i \leq \beta_i^* \leq \gamma_i \leq \gamma_i^*$ et $\beta_i < \beta_i^* < \gamma_i$ impliquent $\gamma_i < \gamma_i^*$. Or, les inégalités

$\beta_i < \beta_i^* < \gamma_i < \gamma_i^*$ sont impossibles, car ou bien $\tilde{S}_i = \tilde{S}_i^* = \mathcal{L}_i(\Lambda)$, donc

$h_\alpha(B_i) = h_\alpha(C_i) < h_\alpha(B_i^*)$ (sur $\tilde{S}_i$) et $h_\alpha(B_i^*) = h_\alpha(C_i^*) < h_\alpha(C_i)$ (sur $\tilde{S}_i^*$), ce qui

est contradictoire, ou bien $\tilde{S}_i = \tilde{S}_i^* = \mathcal{P}_i(\Lambda)$, donc, $\gamma_i^* - \gamma_i < \bar{a}_i$, donc $\leq \bar{a}_i - 1$

et $C_i^* \in S_i''$, ce qui entraîne à la fois, $h_\alpha(C_i) > h_\alpha(C_i^*)$ (sur $\tilde{S}_i^*$) et

$h_\alpha(C_i^*) > h_\alpha(C_i)$ (sur S_i''), ce qui est encore contradictoire. On doit donc avoir

ou bien $B_i = B_i^*$, ce qui entraîne $\tilde{S}_i^* = \tilde{S}_i$ ou bien $B_i^* = C_i^!$, ce qui entraîne

$\tilde{S}_i \supseteq S_i^{*'}$.

Supposons maintenant que $\tilde{S}_i$ et $\tilde{S}_i^*$ sont des courbes inégales et qu'en outre $l_i \neq 0$. On peut supposer (en changeant éventuellement les notations) que $\tilde{S}_i = \mathcal{Q}_i(\Lambda)$ et $\tilde{S}_i^* = \mathcal{P}_i(\Lambda)$, en n'exigeant plus $\beta_1 \leq \beta_1^*$. Alors $\beta_i \leq \gamma_i^* \leq \delta_i + 1$ et $\alpha_i \leq \beta_i^* \leq \gamma_i$ [car, $\beta_i \leq \gamma_i^*$ et $\alpha_i \leq \beta_i^* \leq \gamma_i$ résultent de $\tilde{S}_i \cap \tilde{S}_i^* \neq \emptyset$; en plus, $\delta_i - \gamma_i^* = (\delta_i - \beta_i^*) - (\gamma_i^* - \beta_i^*) \geq (\delta_i - \gamma_i) - (\gamma_i^* - \beta_i^*) = \bar{a}_i - 1 - \bar{a}_i = -1$]. On a, d'ailleurs, $\gamma_i^* \leq \delta_i$ si $\beta_i^* \neq \gamma_i$. Ainsi, si $B_i^* \neq C_i$, on a $C_i^* \in S_i$. Or, C_i^* est le point de S_i^* donc aussi, dans ce cas, de $S_i \cap S_i^*$ dont la α -hauteur est minimale. Mais si $\gamma_i < \gamma_i^* \leq \delta_i$, on doit avoir (sur S_i) $h_\alpha(C_i^*) > h_\alpha(C_i)$ et $h_\alpha(C_i) > h_\alpha(C_i^*)$ (sur $\tilde{S}_i^*$), ce qui est contradictoire. Et si $\gamma_i^* < \gamma_i$, on a $B_i \in S_i^*$ [en effet, $\gamma_i^* < \gamma_i \Rightarrow \gamma_i^* - \beta_i < \gamma_i - \beta_i = a_i = \bar{a}_i + a_{i-1} < 2\bar{a}_i = \gamma_i^* - \alpha_i^*$, car $l_i \neq 0$ implique $\bar{a}_i > a_{i-1}$]. On doit donc avoir $h_\alpha(B_i) > h_\alpha(C_i^*)$ (sur S_i^*) et $h_\alpha(C_i^*) > h_\alpha(B_i)$ (sur $\tilde{S}_i$), ce qui est contradictoire.

Par conséquent, si $l_i \neq 0$, on doit avoir $C_i^* = B_i$ ou $C_i^* = C_i$. La dernière possibilité n'a pas lieu. En effet, si $\tilde{S}_i^* = \mathcal{P}_i(\Lambda)$, on a $\xi_{i+1}^* = l_{i+1} + 1$, donc $\tilde{S}_i^*$ est précédée sur S_i^* (donc sur S) par une courbe de la forme $\mathcal{Q}_i(\Lambda) = (l_i + 1)\mathcal{Q}_{i-1}(\Lambda) + \mathcal{P}_{i-1}(\Lambda)$, qui se termine par une courbe de la forme $\mathcal{Q}_{i-1}(\Lambda) + \mathcal{P}_{i-1}(\Lambda)$. D'autre part, $\tilde{S}_i = \mathcal{Q}_i(\Lambda) = \mathcal{Q}_{i-1}(\Lambda) + \mathcal{P}_i(\Lambda)$ est précédée sur S_i (donc sur S) par $S_i' = \mathcal{P}_i(\Lambda) = l_i\mathcal{Q}_{i-1}(\Lambda) + \mathcal{P}_{i-1}(\Lambda)$. Ainsi, la partie terminale $\mathcal{P}_i(\Lambda)$ de S_i , qui n'est autre chose que $\tilde{S}_i^*$, est précédée sur S par une courbe de la forme $\mathcal{P}_{i-1}(\Lambda) + \mathcal{Q}_{i-1}(\Lambda)$.

Ainsi, $\tilde{S}_i^*$ est précédée (sur S) à la fois par $\mathcal{P}_{i-1}(\Lambda) + \mathcal{Q}_{i-1}(\Lambda)$ et par $\mathcal{Q}_{i-1}(\Lambda) + \mathcal{P}_{i-1}$. Ainsi, ces deux dernières courbes, qui ont la même projection horizontale et le même point terminal doivent coïncider, ce qui est absurde car $\mathcal{Q}_{i-1}(\Lambda)$ ne commence pas par $\mathcal{P}_{i-1}(\Lambda)$.

Ainsi, en supposant de nouveau $\beta_1 \leq \beta_1^*$, on voit que si $l_i \neq 0$, ou bien $C_i = B_i^*$, ou bien $C_i = C_i^*$, auquel cas, S_i et $\tilde{S}_i$ doivent être des courbes égales, donc doivent coïncider. Donc, ou bien $\tilde{S}_i \cap \tilde{S}_i^* = \{B_i^* = C_i^*\}$, ou bien $\tilde{S}_i = \tilde{S}_i^*$.

Supposons que i', i'' sont deux indices tels que $i'' > i'$, $\tilde{S}_{i'} = \tilde{S}_{i'}^*$, et $\tilde{S}_{i''} = \tilde{S}_{i''}^*$. Alors, si $i' < i < i''$, on a encore $\tilde{S}_i = \tilde{S}_i^*$. En effet, $\tilde{S}_{i''} = \tilde{S}_{i''}^*$ a une partition canonique de la forme $\sum S_i^{(j)}$ où les $S_i^{(j)}$ sont des courbes égales à $\mathcal{Q}_i(\Lambda)$ ou $\mathcal{T}_i(\Lambda)$. Et $\tilde{S}_i, \tilde{S}_i^*$ sont, par construction, des ensembles de la partition précédente $[\sum S_i^{(j)}]$ contenant respectivement $\tilde{S}_{i'}, \tilde{S}_{i'}^*$. Donc $\tilde{S}_{i'} = \tilde{S}_{i'}^*$ implique $\tilde{S}_i = \tilde{S}_i^*$.

D'autre part, si $i \geq 1$ est tel que $\tilde{S}_i = \tilde{S}_i^*$ et si $j > i$ est tel que $l_j \neq 0$, on doit avoir $\tilde{S}_j = \tilde{S}_j^*$. S'il en était autrement, $\tilde{S}_j^* \cap \tilde{S}_j$ serait réduite à un seul point, tandis que, comme $\tilde{S}_i \subseteq \tilde{S}_j$ et $\tilde{S}_i^* \subseteq \tilde{S}_j^*$, on doit avoir $\tilde{S}_j \cap \tilde{S}_j^* \supseteq \tilde{S}_i = \tilde{S}_i^*$ et $\tilde{S}_i$, pour $i \geq 1$, contient au moins deux points. Comme il y a une infinité d'indices j tels que $l_j \neq 0$, on voit que $\tilde{S}_i = \tilde{S}_i^*$ implique $\tilde{S}_j = \tilde{S}_j^*$ pour tout $j \geq i$. Ainsi, dans le cas considéré et à partir d'un certain rang, $\tilde{S}_{j-1}$ et $\tilde{S}_{j-1}^*$ coïncident avec un même terme de la partition canonique (considérée) de $\tilde{S}_j = \tilde{S}_j^*$, donc $\xi_j^* = \xi_j$ à partir d'un certain rang.

La seule alternative qui reste à envisager est que, à partir d'un certain rang i_0 , on ait toujours $C_i = B_i^*$. Supposons qu'il en soit ainsi et que ou bien $\xi_i \leq l_i$ ou bien $\xi_i^* > 0$. Dans le premier cas, $\tilde{S}_{i-1}$ n'est pas le dernier ensemble égal à $\mathcal{T}_{i-1}(\Lambda)$ de la décomposition de $\tilde{S}_i = \hat{l}_i \mathcal{Q}_{i-1}(\Lambda) + \mathcal{T}_{i-1}(\Lambda)$ [où $\hat{l}_i$ est égal à $l_i + 1$ ou à l_i , selon que $\tilde{S}_i = \mathcal{Q}_i(\Lambda)$ ou $\tilde{S}_i = \mathcal{T}_i(\Lambda)$] en $\mathcal{Q}_{i-1}(\Lambda)$ et $\mathcal{T}_{i-1}(\Lambda)$.

Comme $B_1 \in \tilde{S}_{i-1}$, on a $\gamma_i - \beta_1 > \bar{a}_{i-1}$. Dans le second cas, $\tilde{S}_{i-1}^*$

n'est pas le premier ensemble de la décomposition (analogue à la précédente pour $\tilde{S}_i$) de $\tilde{S}_i^*$, à moins que $\tilde{S}_i^*$ ne soit égale à $\mathcal{T}_i(\Lambda)$ (ce qui implique $\xi_{i+1}^* = l_{i+1} + 1$) et $\xi_i^* = 1$.

Donc, si $\xi_i^* > 1$ ou si $\xi_i^* = 1$, mais $\xi_{i+1}^* < l_{i+1} + 1$, le point B_1^* est séparé de $B_i^* = C_i$ (dans S) par au moins un ensemble égal à $\mathcal{Q}_{i-1}(\Lambda)$, ce qui entraîne $\beta_1^* - \beta_i^* = \beta_1^* - \gamma_i > a_{i-1} > \bar{a}_{i-1}$. Ainsi, si $\xi_i \leq l_i$ ou si $\xi_i^* > 0$ sans que l'on ait $\xi_{i+1}^* = l_{i+1} + 1$ ou $\xi_i^* > 1$, on a $\beta_1^* - \beta_i^* = (\beta_1^* - \gamma_i) + (\gamma_i - \beta_i) > \bar{a}_{i-1}$.

Cela n'est pas possible à partir d'un certain rang (car $\bar{a}_{i-1} \rightarrow +\infty$ quand $i \rightarrow +\infty$) ; donc, à partir de ce rang, on doit avoir $\xi_i = l_{i+1} + 1$ et ou bien $\xi_i^* = 0$, ou bien, $\xi_i = 1$ avec $\xi_{i+1}^* = l_{i+1} + 1$. Mais, d'autre part, on a $\xi_{i+1}^* \leq 1$, ce qui implique $\xi_{i+1}^* = 1$ et $l_{i+1} = 0$.

Ainsi, si $\xi_i^* = 1$, on a $\xi_{i+1}^* = 1$ et $l_{i+1} = 0$, ce qui implique, par récurrence, $\xi_j^* = 1$ et $l_j = 0$ pour tout $j > i$. Mais, par hypothèse, l_i n'est pas asymptotiquement égal à 0. Donc, $\xi_i^* = 1$ n'est pas possible et on a $\xi_i^* = 0$ à partir d'un certain rang. Par conséquent, E est asymptotiquement égal à $\Lambda + 1 = (\xi_i = l_i + 1)$ et E^* est asymptotiquement égal à $0 = (\xi_i = 0)$.

Pour achever la démonstration du théorème il faut encore prouver que $S(\Lambda, \Lambda+1) = S(\Lambda, 0)$. Soit $\mathcal{S} = S(\Lambda, 0)$ placée de manière que $\tilde{S}_1$ commence en $\dot{0}$, et soit B_1^* son point d'abscisse -1. Si i est un indice ≥ 1 , soit i' le plus petit indice $> i$ tel que $l_{i'} \neq 0$ et soit $S_{i'}'(\Lambda) + \tilde{S}_{i'}(\Lambda) = \mathcal{T}_{i'}(\Lambda) + \mathcal{Q}_{i'}(\Lambda) =$
 $= l_{i'} \mathcal{Q}_{i'-1}(\Lambda) + \mathcal{T}_{i'-1}(\Lambda) + (l_{i'} + 1) \mathcal{Q}_{i'-1}(\Lambda) + \mathcal{T}_{i'-1}(\Lambda) =$
 $= l_{i'} [\mathcal{Q}_{i-1}(\Lambda) + (i' - i) \mathcal{T}_{i-1}(\Lambda)] + \mathcal{T}_{i-1}(\Lambda) + (l_{i'} + 1) [\mathcal{Q}_{i-1}(\Lambda) + (i' - i) \mathcal{T}_{i-1}(\Lambda)] +$
 $+ \mathcal{T}_{i-1}(\Lambda) = U_1 + U_2 + U_3$ où $U_1 = (l_{i'} - 1) \mathcal{Q}_{i'-1}(\Lambda) + \mathcal{Q}_{i-1}(\Lambda) + (i' - i - 1) \mathcal{T}_{i-1}(\Lambda)$,
 $U_2 = 2 \mathcal{T}_{i-1} + \mathcal{Q}_{i-1}(\Lambda)$, $U_3 = (i' - i - 1) \mathcal{T}_{i-1}(\Lambda) + l_{i'} \mathcal{Q}_{i'-1}(\Lambda) + \mathcal{T}_{i-1}(\Lambda)$. La partie

$\mathfrak{Q}_{i-1}(\Lambda)$ de U_2 commence au point $\dot{O}$ et se décompose en $\mathfrak{Q}_{i-1} = V + W$ où $V = \mathcal{P}'_{i-1}(\Lambda)$.

Si S_{i-1}^* désigne le commencement de $2\mathcal{P}_{i-1}(\Lambda) + V$ de U_2 et si l'on pose

$S_{i-1}^{*'} = \mathcal{P}_{i-1}(\Lambda)$, $\tilde{S}_{i-1}^* = \mathcal{P}_{i-1}(\Lambda)$ et $\tilde{S}_{i-1}^{*''} = V$, il est clair que les courbes S_i^*

satisfont à toutes les conditions requises quant à leur forme. En outre, on a

$S = \bigcup_{i=1}^{+\infty} S_i^*$, car S_{i-1}^* ($i > 1$) commence en un point de S d'abscisse $-2\bar{a}_{i-1}$,

qui tend vers $-\infty$ quand $i \rightarrow +\infty$, et se termine au point de S d'abscisse $\bar{a}_{i-1} - 1$,

qui tend vers $+\infty$ quand $i \rightarrow +\infty$. D'autre part, $\tilde{S}_i^*$ contient le point B_1^*

d'abscisse $-1 = -\bar{a}_0 \geq -\bar{a}_1$. De plus, il est clair que $\tilde{S}_{i-1}^*$ qui se termine en $\dot{O}$,

lequel est aussi le point final de $\tilde{S}_i^*$, est le dernier ensemble de la partition

$\tilde{S}_i^* = \mathcal{P}_i(\Lambda) = l_i \mathfrak{Q}_{i-1}(\Lambda) + \mathcal{P}_{i-1}(\Lambda)$ de $\tilde{S}_i^*$, ce qui montre que la suite $E^* = (\xi_i^*)$

correspondant au système inductif $(S_i^*; \varphi_i = \text{identité})$ est tel que, pour tout i ,

on ait $\xi_i = l_i + 1$. Par conséquent, on a aussi $S = S(\Lambda, \Lambda+1)$, ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire : $S(\Lambda, E) = S(\Lambda, 0)$ si, et seulement si $\xi_i = 0$ ou si $\xi_i = l_{i+1}$ à partir d'un certain rang.

Cela résulte directement du théorème précédent.

(6.4.4) Indiquons une autre forme des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une courbe indéfinie limite E de Z^2 soit de préévaluation. Cette forme nous servira dans certaines applications ultérieures.

Soit j un entier relatif et h un entier positif. Considérons la partie de la courbe E contenue dans la bande semi-ouverte $j < z_2 \leq j + h$. Elle est la somme, dans une certaine succession, de h pentes $\mathcal{P}_0$ et d'un nombre fini $n_j(h)$ de paliers $\mathfrak{Q}_0$. En plus, le segment de E , de projection horizontale 1, qui la précède est de la forme $\mathcal{P}_0$, car s'il était de la forme $\mathfrak{Q}_0$, il serait contenu dans la droite $z_2 = j + h$.

Montrons que la condition est aussi suffisante. Supposons qu'il existe un quadruple irrégulier pour E, c'est-à-dire,

$$P_1 = (i_1, j+h), P_2 = (i_2, j), P_3 = (i_3, j'+h), P_4 = (i_4, j')$$

tels que, d'une part, $i_1 - i_2 = i_3 - i_4 = 1 < 0$, d'autre part, $P_1 \in \text{int.E}$ et $P_2 \in \text{ext.E}$, alors que $P_3 \in \text{ext.E}$ et $P_4 \in \text{int.E}$.

On a $h > 0$, car autrement $P_3 \in \text{ext.E}$ entraînerait $P_4 \in \text{ext.E}$.

Puisque $P_1 \in \text{int.E}$ et $P_4 \in \text{int.E}$ entraînent $i_1 < i(j+h)$ et $i_4 < i(j')$ et $P_2 \in \text{ext.E}$ et $P_3 \in \text{ext.E}$ impliquent $i_2 \geq i(j)$ et $i_3 \geq i(j'+h)$, on aura $n_j(h) = i(j) - i(j+h) - h < i_2 - i_1 - h = 1 - h$, tandis que $n_{j'}(h) = i(j') - i(j'+h) - h > i_4 - i_3 - h = 1 - h$. Par suite, on a $n_{j'}(h) - n_j(h) = (n_{j'}(h) - 1 - h) + (1 - h - n_j(h)) \geq 1 + 1 = 2$, ce qui contredit la condition énoncée dans le lemme et qui prouve que cette condition est aussi suffisante.

Soit $S(\theta) = S(\Lambda, \Xi)$ (si Λ est infini) ou $S(\Lambda, \xi)$ (si Λ est fini) une courbe de $\mathbb{R}^2$ dont l'ensemble des points entiers est une courbe indéfinie limite de préévaluation. Soit $i(j)$ sa deuxième fonction caractéristique [donc $n_j(h) = i(j) - i(j+h) - h$]. Soit $T(i_0, j_0, \lambda)$ (où $i_0, j_0 \in \mathbb{Z}$ et $\lambda \in \mathbb{N}$) la transformation du plan (i, j) telle que

$$T(i_0, j_0, \lambda) \cdot (i, j) = (i - i_0 + \lambda j, j - j_0). \text{ On a}$$

Théorème. Si $\lambda \leq 1_1$, $T(i_0, j_0, \lambda) \cdot [i(j), j] = [i^*(j^*), j^*]$, où $i^*(j)$ est encore la deuxième fonction caractéristique d'une courbe indéfinie limite de préévaluation formée de l'ensemble des points entiers d'une courbe indéfinie limite de préévaluation de la forme $S(\theta') = (\Lambda', \Xi')$ [resp. $S(\Lambda', \xi')$], telle que $\Lambda' = (1_1 - \lambda, 1_2, \dots, 1_q, \dots; q < \sigma)$ et $\xi' = \xi$ si Λ est fini, tandis que si Λ est infini, on a $\Xi' = [\max(\xi_1 - \lambda, 0), \xi_2, \dots, \xi_q, \dots]$ (on peut d'ailleurs supposer $\xi_1 = 0$, auquel cas $\xi'_1 = \xi_1$).

$$\begin{aligned} & \text{En effet, on a } [i^*(j) - i^*(j+h)] - [i^*(j') - i^*(j'+h)] = \\ & = [(i(j+j_0) - i_0 + \lambda(j+j_0)) - (i(j+h+j_0) - i_0 + \lambda(j+h+j_0))] - [(i(j'+j_0) - i_0 + \lambda(j'+j_0)) - \\ & - (i(j'+h+j_0) - i_0 + \lambda(j'+h+j_0))] = [i(j+j_0) - i(j+j_0+h) - \lambda h] - \\ & - [i(j'+j_0) - i(j'+j_0+h) - \lambda h] = [i(j+j_0) - i(j+j_0+h)] - [i(j'+j_0) - i(j'+j_0+h)]. \end{aligned}$$

Or, puisque $|[i(j+j_0) - i(j+j_0+h)] - [i(j'+j_0) - i(j'+j_0+h)]| \leq 1$, on a

$$|[i^*(j) - i^*(j+h)] - [i^*(j') - i^*(j'+h)]| \leq 1.$$

Ainsi, si $i^*(j)$ est la deuxième fonction caractéristique d'une hypersurface indéfinie limite, cette hypersurface est de préévaluation.

Pour voir que $i^*(j)$ est la deuxième fonction caractéristique d'une hypersurface indéfinie limite, il suffit de montrer que, pour tout $j \in \mathbb{Z}$ on a

$$n_j^*(1) = i^*(j) - i^*(j+1) - 1 \geq 0.$$

$$\begin{aligned} \text{Or, on a } n_j^*(1) &= [i(j+j_0) - i_0 + \lambda(j+j_0)] - [i(j+j_0+1) - i_0 + \lambda(j+j_0+1)] - 1 = \\ &= [i(j+j_0) - i(j+j_0+1) - 1] - \lambda = n_{j+j_0}(1) - \lambda. \end{aligned}$$

Mais, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, on a $n_j(1) \geq 1_1$, donc $n_j^*(1) \geq 1_1 - \lambda_1 \geq 0$ (par hypothèse, on a $\lambda \leq 1_1$).

On voit, par ailleurs, que la plus petite valeur prise par $n_j^*(1)$ est $1_1 - \lambda$, (la plus grande étant $1_1 - \lambda + 1$), ce qui montre que le premier terme de Λ' est bien $1_1 - \lambda$.

Comme la distribution des paliers et des pentes homologues d'ordre 1 est la même sur $S = S(\theta)$ et $S' = S(\theta')$ [(le palier (resp. la pente) d'ordre 1 de S dont le début est d'ordonnée j sera considéré comme homologue de celui (resp. celle) de S' dont le début est d'ordonnée $j^* = j - j_0$)] et, comme le choix de ξ_1 est indifférent si l'on considère les courbes à une translation près, on peut, en particulier le choisir de la manière indiquée dans le résultat ; ce qui donne le résultat énoncé.

On va désigner la courbe $S' = S(\theta')$ par $S^{T(i_0, j_0, \lambda)}$.

Il est clair que $T(i_0, j_0, 0)$ est la translation $T = (-i_0, -j_0)$.

Les transformations $T(0,0,\lambda)$ avec $0 < \lambda \leq 1$, sont dites transformations hélicoïdales. En particulier, $S^{T(0,0,1)}$ sera dite la réduite hélicoïdale de S . Pour cette réduite hélicoïdale de S , la suite Λ' commence par $l'_1 = 0$, ce qui signifie que tous les $n_j^*(1)$ prennent la valeur 0 ou 1.

Une telle courbe (qui est égale à sa réduite hélicoïdale) sera dite hélicoïdalement réduite.

CARACTERISATION EXPLICITE
DES SOUS-ENSEMBLES DE TYPE ML DE PREVALUATION DANS N^2 .

INVARIANTS ASSOCIES

§ (7.1) - CARACTERISATION GEOMETRIQUE.

(7.1.1) Soit E un ensemble de points $P_{x_1} = (x_1, x_2 = j(x_1))$ de $N^2 \subset Z^2 \subset R^2$ tels que $0 \leq x_1 \leq n_1$, où n_1 est un entier et où j est une fonction satisfaisant aux conditions suivantes :

$$(F_1.) \quad 0 \leq j(x_1) - j(x_1+1) \leq 1$$

$$(F_2.) \quad (a) \quad j(x_1) > 0 \text{ si } x_1 < n_1 \text{ et } j(n_1) = 0$$

$$(F_3.) \quad n_1 \geq j(0) \geq 2$$

(dans toute la suite n_2 désigne $j(0)$).

On sait [(5.1.1), (5.1.6)] que $E \subset N^2$ est un sous-ensemble de type ML. D'après [(5.1.6), (5.6.7), (5.4.5)] E est de prévaluation si et seulement si $Ep(E) < 1$. Dans ce cas, si L' et L'' sont les α -tangentes inférieure et supérieure de E pour un $\alpha \in \mu(E)$ et si l'on tient compte du 1° de la proposition (6.1.1), E est l'ensemble de tous les points entiers $P = (x_1, x_2)$ de la bande fermée $[L', L'']$ tels que $x_1 \geq 0$, $x_2 > 0$ et le point $(n_1, 0)$ qui est le point de l'axe des abscisses X_1 se trouvant dans la bande considérée et dont l'abscisse est la plus petite possible.

Si $\alpha \in \mu(E)$, on a nécessairement $-1 \leq \alpha < 0$ [lemme (5.4.1)]. En outre, E est caractérisé de la même manière que précédemment si l'on remplace la bande fermée $[L', L'']$ par la bande semi-ouverte $[L', L' + e_2[\supset [L', L'']$. En effet, $(n_1, 0)$ est encore le point d'abscisse minimale de X_1 , qui se trouve dans $[L', L' + e_2[$, et si $0 \leq x_1 < n_1$, le point $(x_1, j(x_1)) \in [L', L'']$ est l'unique point entier de $[L', L' + e_2[$ d'abscisse x_1 , car cette bande ne peut contenir qu'un seul point entier d'abscisse fixée. D'autre part, comme $\alpha < 0$ et $(n_1, 1)$ est ou bien au-dessus de $L' + e_2$, ou bien sur cette droite, tout point $(x_1, 1)$ avec $x_1 \geq n_1$, sera au-dessus de $L' + e_2$ et tout point entier $(x_1, x_2) \in [L', L' + e_2[$

tel que $x_1 \geq 0$, $x_2 > 0$ est tel que $x_1 < n_1$ [condition (F_1)].

(7.1.2) Soit L' une droite de pente α telle que $-1 \leq \alpha < 0$, qui coupe l'axe des ordonnées X_2 en un point d'ordonnée > 1 . On note $(n_1, 0)$ le point d'abscisse minimale sur X_1 (axe des abscisses) qui se trouve sur L' ou au-dessus de L' , et on note E l'ensemble de tous les points entiers (x_1, x_2) de la bande semi-ouverte $[L', L' + e_2[$ tels que $x_1 \geq 0$, $x_2 > 0$ et le point $(n_1, 0)$.

Alors, il est clair que $Ep(E) < 1$, et si pour tout $(x_1, x_2) \in E$, on pose $x_2 = j(x_1)$, la fonction j ainsi définie sur $0 \leq x_1 \leq n_1$ satisfait aux conditions (F_1) (F_2) et (F_3) de (VII - 1.1).

En effet, pour tout $x_1 \in \mathbb{Z}$, il y a dans la bande $[L', L' + e_2[$ un et un seul point $(x_1, j(x_1))$. Soit $u(x_1)$ l'ordonnée du point de L' d'abscisse x_1 . Alors, on a :

$$\begin{aligned} u(x_1) &\leq j(x_1) < u(x_1) + 1, \text{ il en résulte, } u(x_1) - u(x_1+1) + 1 = \\ &= [u(x_1) + 1] - u(x_1+1) > j(x_1) - j(x_1+1) > u(x_1) - [u(x_1+1) + 1] = \\ &= u(x_1) - u(x_1+1) - 1. \text{ Comme } -1 \leq \alpha < 0, \text{ on a, } 0 < u(x_1+1) - u(x_1) < 1. \end{aligned}$$

Cela entraîne, compte tenu des inégalités plus haut,

$$-1 < j(x_1) - j(x_1+1) < 2$$

donc,

$$(1) \quad 0 \leq j(x_1) - j(x_1+1) \leq 1$$

car $j(x_1) - j(x_1+1)$ est un entier. Montrons que l'on a

$$E = \{(x_1, j(x_1)) ; 0 \leq x_1 \leq n_1, x_1 \in \mathbb{Z}\}.$$

En effet, comme $j(n_1) = 0$, la première des inégalités (1) plus haut montre que $j(n_1-1) \geq 0$. Mais, $j(n_1-1) = 0$ est impossible car, dans ce cas, on aurait $(x_1-1, 0) \in [L', L' + e_2[$ contrairement à l'hypothèse " $(n_1, 0)$ est un tel point d'abscisse minimale appartenant à cette bande". On a donc $j(x_1-1) = 1$ et $j(x_1) \geq 1 > 0$ pour tout $x_1 \in \mathbb{Z}$ tel que $x_1 < n_1$, toujours à cause de la première

des inégalités (1). Ainsi, l'ensemble des points entiers (x_1, x_2) de $[L', L' + e_2[$ tels que $x_1 \geq 0$ et $x_2 > 0$ est bien $\{(x_1, j(x_1)) ; x_1 \in \mathbb{Z}, 0 \leq x_1 < n_1\}$ et E est bien $\{(x, j(x)) ; x \in \mathbb{Z} ; 0 \leq x \leq n_1\}$. Cela prouve, en même temps, que la restriction à $[0, n_1] \cap \mathbb{N}$ de j (notée encore j) qui définit E , satisfait à la condition (F_2) de (7-1.1). Elle satisfait aussi aux conditions (F_2) et (F_3) , car on a les inégalités (1) précédentes, et par hypothèse L' coupe X_2 en un point d'ordonnée > 1 . Il en résulte

Théorème. Un sous-ensemble $E \subseteq \mathbb{N}^2$ est de type ML et de préévaluation si et seulement s'il existe une droite L' de pente α telle que $-1 \leq \alpha < 0$ coupant l'axe X_2 en un point d'ordonnée > 1 et telle que E soit la réunion de l'ensemble des points entiers $(x_1, x_2) \in [L', L' + e_2[$ tels que $x_1 \geq 0, x_2 > 0$ et de $\{(n_1, 0)\}$, où $(n_1, 0)$ est le point de X_1 d'abscisse minimale et appartenant à $[L', L' + e_2[$.

(7.1.3) Lemme. Si E est un sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}^2$ contenant au moins deux points et tel que, pour tout $x_1 \in \mathbb{Z}$, il n'existe qu'au plus un point de E d'abscisse x_1 , l'ensemble de minceur $\mu(E)$ de E est réduit à un seul nombre réel α , qui est rationnel.

Supposons que E soit un sous-ensemble de points entiers de $\mathbb{R}^s$ (ici, $s = 2$). Soit $\alpha \in \mu(E)$ et soient L'_α, L''_α les α -hyperplans tangents inférieur et supérieur de E . On note $\overline{L'_\alpha \cap E}$ et $\overline{L''_\alpha \cap E}$ les projections horizontales de $L'_\alpha \cap E, L''_\alpha \cap E$ respectivement. Soit U le sous-espace de $\mathbb{R}^{s-1}$ engendré par $\overline{L'_\alpha \cap E} \cup \overline{L''_\alpha \cap E}$ et soit σ sa dimension. Soit, d'autre part, τ la dimension du sous-espace affine engendré par $\mu(E)$. On sait déjà [démonstration du lemme (5.3.7)] que $\sigma + \tau = s - 1$. En particulier, si E est l'ensemble considéré dans le lemme (c'est-à-dire $s=2$), on a $\sigma + \tau = 1$. Or, si $\sigma = 0$, les ensembles $\overline{L'_\alpha \cap E}$ et $\overline{L''_\alpha \cap E}$ se réduisent à un même point $x_1 \in X_1$, donc, $L'_\alpha \cap E$ et $L''_\alpha \cap E$ doivent se réduire aux points de E de même abscisse x_1 ; or, si $\text{Ep}(E) > 0$, les points précédents sont distincts et E contient plus d'un point d'abscisse x_1 , contrairement à l'hypothèse.

Si $\text{Ep}(E) = 0$, on a $L'_\alpha = L''_\alpha$, donc $L'_\alpha \cap E = L''_\alpha \cap E = E$, ce qui entraîne dans ce cas, que E est réduit à un point, ce qui est encore contraire à l'hypothèse. Ainsi, on doit avoir $\sigma > 0$, donc $\tau = 0$, ce qui signifie que $\mu(E)$ est réduit à un seul point $\alpha \in \mathbb{R}$.

Mais alors α est un point extrémal de l'ensemble convexe $\mu(E)$, donc est rationnel [(5.3.3), remarque (2) et (5.3.9), proposition].

(7.1.4) Comme tout sous-ensemble E de $\mathbb{N}^2$ tel que $E = \{(x_1, j(x_1)) ; 0 \leq x_1 \leq n_1, x_1 \in \mathbb{Z}\}$ et j satisfait aux conditions $(F_1), (F_2)$ et (F_3) de (7.1.1), satisfait aussi aux hypothèses du lemme précédent, on a le résultat suivant.

Proposition. L'ensemble de minceur d'un sous-ensemble E de $\mathbb{N}^2$ de type ML est réduit à un seul nombre rationnel α tel que $-1 \leq \alpha < 0$.

Définition. Le nombre rationnel de la proposition précédente est encore dit la direction de minceur de $E \subseteq \mathbb{N}^2$ de type ML. On le note α_E .

§ (7.2) - SOUS-ENSEMBLES DE TYPE ML INDEFINIMENT PROLONGEABLES.

(7.2.1) Définition. Soient $E \subseteq \mathbb{N}^2$ un sous-ensemble de type ML de préévaluation, $S \subseteq \mathbb{Z}^2$ une courbe indéfinie limite de préévaluation. On dit que S est un prolongement de E si $E \subseteq S$.

(7.2.2) Si l'on tient compte des résultats de (6.1.1), (6.2.2), (6.2.3) et (6.2.4), on voit qu'une courbe indéfinie limite de préévaluation $S \subseteq \mathbb{Z}^2$ se caractérise par un ensemble d'invariants $\theta = (\Lambda, \xi)$ si Λ est fini ou $\theta = (\Lambda, \Xi)$ si Λ est infini, et par la hauteur $h(L')$ de sa tangente inférieure.

On peut aussi caractériser S par les invariants suivants :

1° $\alpha = \alpha(\Lambda)$ (si Λ est infini ou si Λ est fini et $\xi = 0$ ou $+$) ou $\alpha = \alpha(\Lambda^*)$ (si Λ est fini et $\xi = -$).

2° $h(L')$

3° le type ξ (si Λ est fini)

4° l'abscisse du point extrême de $L' \cap S$ (si Λ est fini) ou l'indication (si Λ est infini et $(L' \cup L'') \cap Z^2 \neq \emptyset$) de l'unique point de $(L' \cup L'') \cap Z^2$ qui se trouve sur L' ou sur L'' [l'abscisse de ce point, si Λ est infini, est déjà déterminée par α et $h(L')$].

Remarque 1. Pour un α fixé, si l'on suppose que $(L' \cup L'') \cap Z^2 \neq \emptyset$, le nombre $h(L')$ n'est pas arbitraire : en effet, si α est rationnel et si d est son dénominateur ($d \geq 1$), $h(L')$ doit être un multiple de d^{-1} ; si α est irrationnel, $h(L')$ doit appartenir au groupe additif engendré par 1 et α [(6.1.2) lemme 1].

En particulier, si le prolongement S de E est de la forme $S(\Lambda, 0)$ où Λ est fini, on dira que S est un prolongement périodique de E .

2. On sait [(6.2.1) démonstration de la remarque 2] que si $\alpha(\Lambda)$ est rationnel et écrit sous la forme d'une fraction irréductible $\frac{b(\Lambda)}{a(\Lambda)}$ où $a(\Lambda) \geq 1$, le dénominateur $d = a(\Lambda)$ de $\alpha(\Lambda)$ est égal à la mesure de la projection horizontale de $\Omega(\Lambda)$ (orientée dans le sens des abscisses croissantes) et $b(\Lambda)$ est égal à la mesure de la projection verticale de $\Omega(\Lambda)$. De plus,

(a) E peut être prolongée par une courbe indéfinie limite de préévaluation de direction de minceur α si, et seulement si $Ep_\alpha(E) \leq 1$.

(b) Si α est rationnel et $Ep_\alpha(E) = 1$, seul est possible le prolongement par une courbe indéfinie limite de préévaluation non-périodique ($\xi \neq 0$) tandis que si $Ep_\alpha(E) < 1$, E admet un prolongement périodique.

Démonstration de (a) et (b).

Les hypothèses de (a) et (b) sont nécessaires pour leurs conclusions : si $Ep_\alpha(E) > 1$ et si $S \supset E$ est une courbe indéfinie limite de préévaluation de direction de minceur α , on doit avoir $Ep_\alpha(S) \geq Ep_\alpha(E) > 1$, et S ne peut être de préévaluation. Et si l'on a $Ep_\alpha(E) = 1$, il en résulte, $Ep_\alpha(S) \geq 1$, c'est-à-dire $Ep_\alpha(S) = 1$, donc (en supposant α rationnel) S ne peut pas être périodique [(6.1.3) proposition 1].

Supposons que $Ep_{\alpha} \leq 1$. Soient L', L'' les α -tangentes inférieure et supérieure à E , $\overline{L' \cap E}$ et $\overline{L'' \cap E}$ les projections horizontales de $L' \cap E$ et $L'' \cap E$ respectivement.

Soient D la bande fermée $[L', L' + e_2]$ et D' la bande semi-ouverte $[L', L' + e_2[$.

Si $Ep_{\alpha}(E) = 1$. Alors, puisque $Ep(E) < 1$, on a $\alpha \notin \mu(E)$. Par suite, les segments de longueur minimale contenant $\overline{L' \cap E}$ et $\overline{L'' \cap E}$ respectivement sont disjoints [(7.3.2) Lemme].

Par conséquent, il existe des demi-droites $\overline{M}$ de l'axe des abscisses contenant $\overline{L' \cap E}$ et disjointes de $\overline{L'' \cap E}$. Dès lors, si S est la réunion de l'ensemble des $P \in L' \cap \mathbb{Z}^2$ tels que $\overline{P} \in \overline{M}$, de l'ensemble des points entiers de $]L', L''[$ et de l'ensemble des $P \in L'' \cap \mathbb{Z}^2$ tels que $\overline{P} \notin \overline{M}$; il est clair que S est une courbe indéfinie limite de préévaluation prolongeant E .

Si $Ep_{\alpha}(E) < 1$. Soit L une droite arbitraire de pente α telle que $h(L) \leq h(L')$ et $h(L) + 1 = h(L + e_2) \geq h(L'')$. Alors, sauf si $h(L) + 1 = h(L'')$, on a $E \subseteq [L', L''] \subseteq [L + L + e_2[$ et, sauf si $h(L) = h(L')$, on a $E \subseteq [L', L''] \subseteq]L, L + e_2]$.

Il est clair que les inégalités $h(L) \leq h(L')$ et $h(L'') \leq h(L) + 1$ sont nécessaires pour les inclusions précédentes. Par ailleurs, si $L \cap \mathbb{Z}^2 = \emptyset$, on a $[L, L + e_2[\cap \mathbb{Z}^2 =]L, L + e_2] \cap \mathbb{Z}^2$. Ces ensembles de points entiers $S'_{h, \alpha}$ et $S''_{h, \alpha}$ de $[L + L + e_2[$ et $]L, L + e_2]$, où $h = h(L)$ et L est une droite de pente α satisfaisant aux inégalités précédentes, sont des courbes indéfinies limites de préévaluation prolongeant E . Si, en outre, α est rationnel, l'épaisseur de ces courbes est < 1 , elles sont donc périodiques, ce qui achève la démonstration de (a) et (b) précédents.

(c) Comme $\alpha' < \alpha < \alpha'' \Rightarrow Ep_{\alpha}(E) \leq \max[Ep_{\alpha'}(E), Ep_{\alpha''}(E)]$ on voit que l'ensemble $Pr(E) = \{\alpha ; Ep_{\alpha} \leq 1\}$ [resp. $Prp(E) = \{\alpha ; Ep_{\alpha}(E) < 1\}$], dit ensemble de prolongeabilité [resp. prolongeabilité périodique] est convexe, c'est donc un

intervalle de $\mathbb{R}$.

(d) On voit que $\text{Pr}(E)$ est fermé et $\text{Prp}(E)$ est égal à l'intérieur de $\text{Pr}(E)$.

(e) Si $\alpha \in \text{Pr}(E)$, si $h(L')$ est la hauteur de la tangente inférieure L' de E et si S est une courbe indéfinie limite prolongeant E , la borne inférieure $h'_\alpha(S)$ des α -hauteurs des points de S doit être telle que
 $h(L') - 1 + \text{Ep}_\alpha(E) < h'_\alpha(S) \leq h(L')$.

En effet, $h'_\alpha(S)$ n'est autre chose que $h(L)$ de la fin de la démonstration de (a) et (b) précédents. On doit donc avoir $h(L) \leq h(L')$ et $h(L) + 1 \geq h(L'') = h(L') + \text{Ep}_\alpha(E)$, ce qui entraîne $h(L') - 1 + \text{Ep}_\alpha(E) \leq h(L)$. Cela prouve (e).

(7.2.3) On conserve les données et les notations de (7.2.2).

Définition 1. Si $S = S(\Lambda, 0)$ est un prolongement périodique de E , on appellera encore période de E une partie quelconque de S , comprise entre deux de ses points P, Q , telle que le vecteur PQ ait pour projection horizontale et verticale, des segments de mesures respectives $a(\Lambda)$ et $b(\Lambda)$.

Remarque 1. Il est clair que toute période de E , considérée à une translation près, est de la forme $W + U$ où U et W sont des courbes telles que $U+W = \Omega(\Lambda)$.

Définition 2. La translation $T = (a(\Lambda), b(\Lambda))$ est dite translation période de E .

Remarque 2. Soit T une translation de $\mathbb{R}^2$. Si $T.E \cap E \neq \emptyset$, T est la translation période de E si et seulement si $T.E \cap E \subset E$ ["seulement si" est évident, on obtient "si" en construisant la courbe S , prolongeant E , comme

$+ \infty$

$\bigcup_{i=-\infty}^{\infty} T^i.E$, dont on prouve facilement que ses translatées entières ne se

traversent pas quand ceux de E ne se traversent pas].

§ (7.3)-Représentation et propriétés des sous-ensembles E de N^2
de type ML de préévaluation.

(7.3.1) Théorème : Soient E un sous-ensemble de N^2 de type ML de préévaluation, α la direction de minceur de E,

$$\alpha = \frac{-1}{d_1 - \frac{1}{d_2 - \frac{1}{\ddots - \frac{1}{d_n}}}}$$

la décomposition de α en fraction négacontinue, $l_i = d_i - 2$ ($i = 1, 2, \dots, n$),

$\Lambda = (l_1, \dots, l_n)$, $\frac{b_i(\Lambda)}{a_i(\Lambda)}$ la i -ième réduite de α , $d = a_n(\Lambda) > 0$, le dénominateur

de α sous sa forme irréductible, $T = (a_n(\Lambda), b_n(\Lambda))$ la translation-période de E,

P et Q les points de $L' \cap E$ de plus petite et plus grande abscisse respecti-

vement, ld la différence de l'abscisse de Q et de celle de P. Alors E se

représente de manière unique, comme ensemble des points entiers de la courbe

$$S(E) = \sum_{j \in \mathcal{J} \subseteq \{1, \dots, n\}} \left[\lambda_j^! \mathcal{E}_{j-1}(\Lambda) + \mathcal{P}_{j-1}(\Lambda) \right] + l_n \mathcal{E}_n(\Lambda) + \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{n-j+1}'' \mathcal{E}_{n-j}(\Lambda)$$

où on a

1° $0 \leq \lambda_j^! \leq l_j$ ou $l_j - 1$ selon que $j+1 \in \mathcal{J}$ ou $j+1 \notin \mathcal{J}$

2° $0 \leq \lambda_j'' \leq l_j$ ou $l_j + 1$ selon qu'il existe ou qu'il n'existe pas de $j' < j$ tel que $\lambda_{n-j'+1}'' = l_{n-j'+1} + 1$ et $\lambda_q'' = l_q$ pour tout q tel que $n - j' > q - 1 > n - j$.

Inversement, l'ensemble des points entiers d'une courbe $S(E)$ placée de manière qu'elle commence sur l'axe X_2 et se termine sur l'axe X_1 est un ensemble de type ML de préévaluation. On appellera de telles courbes $S(E)$, placées de la manière indiquée, courbes de préévaluation de R^2 .

La courbe $S(E)$ peut se mettre sous la forme

$$U + E' + W$$

où U est sa partie précédant P , E' est sa partie comprise entre P et Q , et W celle suivant Q . On sait [théorème (7.2.3) et sa démonstration] que $E' = 1\mathfrak{Q}_n(\Lambda)$, que U est une partie propre finale d'un $\mathfrak{Q}_n(\Lambda)$ et que W est une partie propre initiale d'un $\mathfrak{Q}_n(\Lambda)$. On sait aussi que

$$\mathfrak{Q}_n(\Lambda) = (1_n + 1)\mathfrak{Q}_{n-1}(\Lambda) + \mathcal{P}_{n-1}(\Lambda)$$

(A) Pour la courbe U , on peut avoir les cas suivants : $1_n) U \supseteq \mathcal{P}_{n-1}(\Lambda)$ et $2_n) U \subset \mathcal{P}_{n-1}(\Lambda)$.

Dans le premier cas, U contient aussi la somme d'un certain nombre λ'_n (λ'_n pouvant être nul) de courbes de la forme $\mathfrak{Q}_{n-1}(\Lambda)$ qui précèdent $\mathcal{P}_{n-1}(\Lambda)$ dans le $\mathfrak{Q}_n(\Lambda) \supset U$. On ne peut pas avoir $\lambda'_n = 1_n + 1$, car on aurait $U = \mathfrak{Q}_n(\Lambda)$, contrairement à l'hypothèse " U est une partie propre de $\mathfrak{Q}_n(\Lambda)$ ". On a par conséquent, $0 \leq \lambda'_n \leq 1_n$. On convient, dans ce cas, de poser $n \in \mathcal{J}$ et on a $n + 1 \notin \mathcal{J}$. Dans le second cas, $\mathcal{P}_{n-1}(\Lambda) \subset U$, donc $n \notin \mathcal{J}$. On pose $U = U_1 + \lambda'_n \mathfrak{Q}_{n-1}(\Lambda) + \mathcal{P}_{n-1}(\Lambda)$ ou $U = U_1$ selon que $n \in \mathcal{J}$ ou $n \notin \mathcal{J}$. Dans le premier cas, U_1 est une partie propre finale de $\mathfrak{Q}_{n-1}(\Lambda)$, dans le second cas, U_1 est une partie propre finale de $\mathcal{P}_{n-1}(\Lambda)$. Mais on a

$$\mathfrak{Q}_{n-1}(\Lambda) = (1_{n-1} + 1)\mathfrak{Q}_{n-2}(\Lambda) + \mathcal{P}_{n-2}(\Lambda)$$

et

$$\mathcal{P}_{n-1}(\Lambda) = 1_{n-1}\mathfrak{Q}_{n-2}(\Lambda) + \mathcal{P}_{n-2}(\Lambda).$$

En continuant la discussion, on voit, en remplaçant $\mathcal{P}_{n-1}(\Lambda)$ par $\mathcal{P}_{n-2}(\Lambda)$ et U par U_1 , que deux cas peuvent se présenter :

$$1_{n-1}) U_1 \supseteq \mathcal{P}_{n-2}(\Lambda) \quad \text{et} \quad 2_{n-1}) U_1 \subset \mathcal{P}_{n-2}(\Lambda).$$

Dans le premier cas, U_1 se termine par une courbe de la forme $\lambda'_{n-1} \mathfrak{g}_{n-2}(\Lambda) + \mathcal{P}_{n-2}(\Lambda)$, où $\lambda'_{n-1} \geq 0$ et $\lambda'_{n-1} \leq 1_{n-1} - 1$ ou $\lambda' \leq 1_{n-1}$ selon que U_1 est une partie finale de $\mathcal{P}_{n-1}(\Lambda)$ ou non, c'est-à-dire, selon que $n \in \mathcal{J}$ ou $n \notin \mathcal{J}$. Et dans le cas 1_{n-1} , on a $n-1 \in \mathcal{J}$. Par contre, dans le cas 2_{n-1} on a $n-1 \notin \mathcal{J}$.

Posons, dans le cas 1_{n-1} , $U_1 = U_2 + \lambda'_{n-1} \mathfrak{g}_{n-2}(\Lambda) + \mathcal{P}_{n-2}(\Lambda)$, et dans le cas 2_{n-1} , $U_1 = U_2$. Alors U_2 est une courbe finale propre de $\mathfrak{g}_{n-2}(\Lambda) = (1_{n-2} + 1) \mathfrak{g}_{n-3}(\Lambda) + \mathcal{P}_{n-2}(\Lambda)$ ou de $\mathcal{P}_{n-2}(\Lambda) = 1_{n-2} \mathfrak{g}_{n-3}(\Lambda) + \mathcal{P}_{n-3}(\Lambda)$ selon que l'on a le cas 1_{n-1} ou 2_{n-1} , autrement dit, selon que $n-1 \in \mathcal{J}$ ou $n-1 \notin \mathcal{J}$. On envisage encore les deux cas 1_{n-2} $U_2 \supset \mathcal{P}_{n-3}(\Lambda)$ et 2_{n-2} $U_2 \subset \mathcal{P}_{n-3}(\Lambda)$, qui sont respectivement équivalents à $n-2 \in \mathcal{J}$ et $n-2 \notin \mathcal{J}$. Et on continue le même raisonnement que précédemment, ce qui prouve que U est bien de la forme indiquée. Il est clair que si U est donnée, le sous-ensemble $\mathcal{J}$ ainsi que les λ'_j ($j \in \mathcal{J}$) sont déterminés de manière unique.

(B) Considérons maintenant la courbe W . C'est une partie propre initiale de $\mathfrak{g}_n(\Lambda) = (1_n + 1) \mathfrak{g}_{n-1}(\Lambda) + \mathcal{P}_{n-1}(\Lambda)$.

Soit λ''_n le plus grand entier tel que $\lambda''_n \mathfrak{g}_{n-1}(\Lambda)$ soit une partie propre initiale de W . Et posons $W = \lambda''_n \mathfrak{g}_{n-1}(\Lambda) + W_1$. W_1 est une partie propre initiale de $\mathfrak{g}_{n-1}(\Lambda) = (1_{n-1} + 1) \mathfrak{g}_{n-2}(\Lambda) + \mathcal{P}_{n-2}(\Lambda)$ ou de

$$\mathcal{P}_{n-1}(\Lambda) = 1_{n-1} \mathfrak{g}_{n-2}(\Lambda) + \mathcal{P}_{n-2}(\Lambda) \text{ selon que } 0 \leq \lambda''_n \leq 1_n \text{ ou } \lambda''_n = 1_n + 1 > 0.$$

Par suite, si λ''_{n-1} est le plus grand entier tel que $\lambda''_{n-1} \mathfrak{g}_{n-2}(\Lambda)$ soit une partie propre initiale de W_1 , on aura $0 \leq \lambda''_{n-1} \leq 1_{n-1}$ ou $\lambda''_{n-1} = 1_{n-1} + 1$ selon que $\lambda''_n = 1_n + 1$ ou $0 \leq \lambda''_n \leq 1_n$. En posant $W_1 = \lambda''_{n-1} \mathfrak{g}_{n-2}(\Lambda) + W_2$, on voit, comme précédemment, que W_2 est une partie initiale propre de $\mathfrak{g}_{n-2}(\Lambda)$ si $\lambda''_n \leq 1_n$

et $\lambda''_{n-1} = 1_{n-1}$ ou si $\lambda''_n = 1_n + 1$ et $\lambda''_{n-1} \leq 1_{n-1} - 1$, tandis que W_2 sera une

partie propre initiale de $\mathcal{T}_{n-2}(\Lambda)$ si $\lambda_n'' = l_n + 1$ et $\lambda_{n-1}'' = l_{n-1}$ ou si $\lambda_n'' \leq l_n$ et $\lambda_{n-1}'' = l_{n-1} + 1$. En continuant comme plus haut, supposons que $\lambda_n'', \lambda_{n-1}'', \dots, \lambda_{n-j}''$ sont les plus grands entiers tels que $\lambda_n'' \mathcal{Q}_{n-1}(\Lambda)$ est une partie propre initiale de W , $\lambda_{n-1}'' \mathcal{Q}_{n-2}(\Lambda)$ est une partie propre de $W_1, \dots, \lambda_{n-j}'' \mathcal{Q}_{n-j-1}(\Lambda)$ est une partie propre initiale de W_j , avec $W_j = \lambda_{n-j}'' \mathcal{Q}_{n-j-1}(\Lambda) + W_{j+1}$.

Alors, la partie $\lambda_n'' \mathcal{Q}_{n-1}(\Lambda) + \lambda_{n-1}'' \mathcal{Q}_{n-2}(\Lambda) + \dots + \lambda_{n-j}'' \mathcal{Q}_{n-j-1}(\Lambda)$ est suivie, en tant que début de $\mathcal{Q}(\Lambda)$, par une courbe de la forme $\mathcal{Q}_{n-j-1}(\Lambda)$ ou $\mathcal{T}_{n-j-1}(\Lambda)$, et cette courbe est $\mathcal{T}_{n-j-1}(\Lambda)$ si ou bien $\lambda_{n-j}'' = l_{n-j} + 1$ ou bien $\lambda_{n-j}'' = l_{n-j}$ et la courbe qui suit $\lambda_n'' \mathcal{Q}_{n-1}(\Lambda) + \dots + \lambda_{n-j+1}'' \mathcal{Q}_{n-j}(\Lambda)$ est $\mathcal{T}_{n-j}$. Donc la courbe considérée est $\mathcal{T}_{n-j}(\Lambda)$ si et seulement s'il existe un $j' < j$ tel que $\lambda_{n-j'}'' = l_{n-j'} + 1$, et pour tout i tel que $j' < i < j$, on a $\lambda_{n-i}'' = l_{n-i}$. Si λ_{n-j}'' est le plus grand entier tel que $\lambda_{n-j}'' \mathcal{Q}_{n-j-1}(\Lambda)$ soit le début de W_j , où $W_j = \lambda_{n-j+1}'' \mathcal{Q}_{n-j}(\Lambda) + W_{j+1}$, on a, $0 \leq \lambda_{n-j}'' \leq l_{n-j} + 1$ selon que W_j est une partie propre de $\mathcal{Q}_{n-j}(\Lambda)$ ou de $\mathcal{T}_{n-j}(\Lambda)$, c'est-à-dire, selon qu'il n'existe pas ou qu'il existe un $j' < j$ ayant les propriétés indiquées plus haut. Il est clair que la donnée de W détermine les $\lambda_n'', \lambda_{n-1}'', \dots, \lambda_1''$.

Quant à la partition de E en U , E' et W elle est déterminée par la donnée de E , car les extrémités de E sont les points extrêmes de $L' \cap E$, et L' est la α -tangente inférieure à E , où α est l'unique élément de $\mu(E)$; ce qui achève la démonstration de la partie directe du théorème.

D'autre part, il est évident qu'une courbe $S(E)$ de la forme précédente est une courbe partielle de la courbe $S(\Lambda, 0)$. Donc si elle est placée de la manière indiquée, l'ensemble de ses points entiers est de type ML et ses translatées entières ne se traversent pas. Donc, cet ensemble est de préévaluation.

Corollaire. L'ensemble $\mathcal{E}(N^2)$ des sous-ensembles E de N^2 de type ML de préévaluation est en correspondance biunivoque avec l'ensemble $\mathcal{Inv}(N^2)$ des systèmes d'entiers suivants (dits systèmes d'invariants de préévaluation) :

$$(1) \left[\Lambda = (l_1, \dots, l_n) ; 1 ; \lambda_{j_1}^1, \dots, \lambda_{j_q}^1 ; \lambda_n'', \lambda_{n-1}'', \dots, \lambda_1'' \right]$$

tels que :

$$1^\circ 0 \leq l_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$$2^\circ 0 \leq 1,$$

$$3^\circ 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_q \leq n, 0 \leq \lambda_{j_q}^1 \leq l_{j_q} \text{ ou } l_{j_q} - 1 \text{ selon que}$$

$$j_{q+1} = j_q + 1 \text{ ou que } j_{q+1} > j_q + 1,$$

$$4^\circ 0 \leq \lambda_j'' \leq l_{j+1} \text{ ou } l_j \text{ selon qu'il n'existe pas ou qu'il existe un } j' > j \text{ tel que } \lambda_{j'}'' = l_{j'+1} \text{ et, pour tout } q \text{ tel que } j' > q > j, \text{ on ait } \lambda_q'' = l_q.$$

(Les entiers $l_1, l_2, \dots, l_n$ et 1 sont dits les invariants principaux, les $\lambda_{j_q}^1$ et λ_j'' étant dits les invariants secondaires du sous-ensemble E caractérisé par le système (1) précédent).

Cela résulte directement du théorème précédent.

(7.3.2) Théorème : Soient $E_1, \dots, E_m$ des sous-ensembles de N^2 de type ML de préévaluation. Les translatées entières des E_i ($i = 1, 2, \dots, m$) ne se traversent pas si et seulement si leur épaisseur collective $Ep(E_1, \dots, E_m)$ est < 1 .

On sait [(5.4.5) ; (7.2.2), théorème ; (6.2.2) ; (5.7.4), (7.1.2)] que le théorème est vrai pour $m = 1$.

(A) Si le théorème est vrai pour $m = 2$, il est vrai pour tout entier m .

$$\text{On a, par définition, } Ep(E_1, \dots, E_m) = \min_{\alpha \in R} \left\{ \max_{1 \leq i \leq m} [Ep_{\alpha_i}(E_i)] \right\}.$$

Donc, $Ep(E_1, \dots, E_m) < 1$ signifie qu'il existe $\alpha \in R$ tel que, pour tout i tel que $1 \leq i \leq m$, on a $Ep_{\alpha_i}(E_i) < 1$. Comme $Ep(E_i) = Ep_{\alpha_i}(E_i)$, où α_i est la direction de minceur de E_i ($1 \leq i \leq m$), et est tel que $-1 \leq \alpha_i < 0$, et comme

$Ep_{\alpha_i}(E_i) < 1$, il est clair que si le α précédent est ≥ 0 ou < -1 , on aura $Ep_{\beta}(E_i) < 1$ pour tout $\beta \in [\alpha_i, \alpha]$ ou $\in [\alpha, \alpha_i]$ selon le cas. Par conséquent, on peut trouver un nombre rationnel β tel que $-1 \leq \beta < 0$ et tel que $Ep_{\beta}(E_i) < 1$ pour tout i tel que $1 \leq i \leq m$. Donc, si $\beta = \alpha(\Lambda)$, la courbe $S(\Lambda, 0)$ est un prolongement périodique commun des E_i , $i = 1, 2, \dots, m$ [théorème (7.2.3)]. Inversement, si les E_i ($i = 1, 2, \dots, m$) admettent un prolongement périodique commun $S(\Lambda, 0)$, et si $\alpha = \alpha(\Lambda)$, il est clair que pour tout entier i , tel que $i = 1, \dots, m$, on a $Ep_{\alpha}(E_i) \leq Ep_{\alpha}[S(\Lambda, 0)] = Ep[S(\Lambda, 0)] = Ep[\mathcal{R}(\Lambda)] < 1$, ce qui prouve que $Ep(E_1, \dots, E_m) < 1$. Ainsi, l'inégalité $Ep(E_1, \dots, E_m) < 1$ équivaut à l'existence d'un prolongement périodique commun des E_i ($i = 1, \dots, m$), autrement dit, à l'existence d'un nombre rationnel β appartenant à tous les $Prp(E_i)$, c'est-à-dire, à ce que $\bigcap_{i=1}^m Prp(E_i) \neq \emptyset$.

Montrons que, si pour tout couple d'entiers $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$, on a $Prp(E_i) \cap Prp(E_j) \neq \emptyset$, on a aussi $\bigcap_{i=1}^m Prp(E_i) \neq \emptyset$ [c'est une application, au cas particulier $s = 2$, du théorème général suivant (théorème de Helly ; Bourbaki, E.V.T. Ch. II, Ex. 21 a)] : "toute famille finie de r ($r > n+1$) parties convexes de $\mathbb{R}^n$, dont l'intersection de toute sous-famille à $r-1$ éléments est non vide, est elle-même d'intersection non vide"].

En effet, supposons que $Prp(E_i) =]\alpha_i, \beta_i[$, et soient $\alpha = \max_{1 \leq i \leq m} (\alpha_i)$ et $\beta = \min_{1 \leq i \leq m} (\beta_i)$.

Alors, $\bigcap_i Prp(E_i)$ est l'ensemble des nombres réels ξ tels que $\alpha < \xi < \beta$. Si cet ensemble est vide, on doit avoir $\beta \leq \alpha$. Mais il existe des indices i et j tels que $\alpha = \alpha_i$ et $\beta = \beta_j$, donc $\beta_j \leq \alpha_i$ et, par conséquent, $Prp(E_i) \cap Prp(E_j) =]\alpha_i, \beta_i[\cap]\alpha_j, \beta_j[= \emptyset$ contrairement à l'hypothèse.

Les translatées entières des différents E_i ($i = 1, 2, \dots, m$) ne se traversent pas si, et seulement si, pour tout $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ les translatées entières de E_i et E_j ne se traversent pas.

Supposons que, pour i et j fixés, ce qui précède soit équivalent à $Ep(E_i, E_j) < 1$, autrement dit à $Prp(E_i) \cap Prp(E_j) \neq \emptyset$. Alors la même condition pour tous les $i, j \in \{1, 2, \dots, m\}$ équivaut à $\bigcap_i Prp(E_i) \neq \emptyset$, autrement dit à $Ep(E_1, \dots, E_m) < 1$, ce que l'on voulait démontrer.

Avant de commencer la démonstration du théorème pour $m = 2$, démontrons d'abord le résultat suivant, réciproque de la proposition (5.3.6) pour $m = 2$, dont on a besoin^(*).

Lemme. Soient E un ensemble fini de points de R^2 , α un nombre réel, L'_α, L''_α les α -tangentes inférieure et supérieure de E , $E' = E \cap L'_\alpha, E'' = E \cap L''_\alpha$, $\bar{E}'$ et $\bar{E}''$ les projections horizontales de E', E'' respectivement, $\mathcal{P}'_\alpha(E)$ et $\mathcal{P}''_\alpha(E)$ les plus petits segments de l'axe des abscisses contenant respectivement $\bar{E}', \bar{E}''$. Alors, si $\alpha \notin \mu(E)$, on a $\mathcal{P}'_\alpha(E) \cap \mathcal{P}''_\alpha(E) = \emptyset$.

Montrons que $\mathcal{P}'_\alpha(E) \cap \mathcal{P}''_\alpha(E) \neq \emptyset \Rightarrow \alpha \in \mu(E)$. En effet, soient $\mathcal{P}'_\alpha(E) = [\bar{A}', \bar{B}']$ et $\mathcal{P}''_\alpha(E) = [\bar{A}'', \bar{B}'']$, où les abscisses des points $\bar{A}', \bar{A}''$ sont inférieures au sens large à ceux des points $\bar{B}', \bar{B}''$ respectivement. Soit $\bar{C}$ un point de $\mathcal{P}'_\alpha(E) \cap \mathcal{P}''_\alpha(E)$, donc, $\bar{A}'$ et $\bar{A}''$ précèdent $\bar{C}$ au sens large sur l'axe des abscisses X_1 , tandis que $\bar{B}'$ et $\bar{B}''$ le suivent au sens large. Soit V la droite verticale passant par $\bar{C}$.

Considérons un nombre réel quelconque $\beta \neq \alpha$ et les β -tangentes inférieure et supérieure L'_β, L''_β à E .

Soient $C'_\alpha, C''_\alpha, C'_\beta, C''_\beta$ les points d'intersection de V avec $L'_\alpha, L''_\alpha, L'_\beta, L''_\beta$ et soient $c'_\alpha, c''_\alpha, c'_\beta, c''_\beta$ leurs ordonnées. Soient,

(*) Cette réciproque est d'ailleurs vraie pour m quelconque, on le démontre plus loin [(9.3) Lemme 5].

d'autre part, A', B' les points de E' dont les projections horizontales sont $\bar{A}', \bar{B}'$ et A'', B'' les points de E'' dont les projections horizontales sont $\bar{A}'', \bar{B}''$. Les points A', B' doivent se trouver au-dessus ou sur L_β' , donc l'ordonnée c_β' de C_β' est inférieure ou égale au minimum de celles $c_{A',\beta}', c_{B',\beta}'$ des points d'intersection $C_{A',\beta}', C_{B',\beta}'$ de V avec les droites $L_{A',\beta}', L_{B',\beta}'$ de pente β passant par A', B' respectivement. Comme C_α' est l'intersection de V avec la droite L_α' de pente α passant par A' et B' , on a $c_{A',\beta}' \leq c_\alpha'$ et $c_{B',\beta}' \geq c_\alpha'$ si $\beta < \alpha$, tandis que $c_{A',\beta}' \geq c_\alpha'$ et $c_{B',\beta}' \leq c_\alpha'$ si $\beta > \alpha$. Donc, dans tous les cas, on a $\min(c_{A',\beta}', c_{B',\beta}') \leq c_\alpha'$ si $\alpha \neq \beta$, par conséquent, $c_\beta' \leq c_\alpha'$. D'autre part, A'' et B'' doivent se trouver au-dessous ou sur L_β'' , d'où l'on déduit, comme précédemment, $c_\beta'' \geq \max(c_{A'',\beta}'', c_{B'',\beta}'') \geq c_\alpha''$.

Par suite, $Ep_\beta(E) = h(L_\beta'') - h(L_\beta') = c_\beta'' - c_\beta' \geq c_\alpha'' - c_\alpha' = Ep_\alpha(E)$, ce qui prouve que $Ep_\alpha(E) = \min_{\beta \in R} (Ep_\beta(E)) = Ep(E)$, donc, que $\alpha \in \mu(E)$. On a, par conséquent, $\alpha \notin \mu(E) = \mathcal{T}'_\alpha(E) \cap \mathcal{T}''_\alpha(E) = \emptyset$, ce qu'il fallait prouver.

Prouvons maintenant le théorème pour $m = 2$.

D'abord si E_1, E_2 ont un prolongement périodique commun $S = S(\Lambda, 0)$, on peut les considérer comme translatées de certaines parties (finies) $E_1' \cap Z^2$, $E_2' \cap Z^2$ de S , et comme les translatées entières de S ne se traversent pas, il en sera de même de ses parties $E_1' \cap Z^2$ et $E_2' \cap Z^2$.

Inversement, supposons que les translatées entières de E_1 et E_2 ne se traversent pas, que $Ep(E_1, E_2) = \min_\alpha \left\{ \max_\alpha [Ep_\alpha(E_1), Ep_\alpha(E_2)] \right\} \geq 1$ et que α_0 est tel que $Ep(E_1, E_2) = \max_\alpha [Ep_\alpha(E_1), Ep_\alpha(E_2)]$.

Montrons d'abord que, dans ce cas, on a $Ep_{\alpha_0}(E_1) = Ep_{\alpha_0}(E_2)$. Supposons qu'il en soit autrement, on peut supposer, par exemple, que $Ep_{\alpha_0}(E_1) > Ep_{\alpha_0}(E_2)$. Par hypothèse, on a $Ep(E_1) < 1 \leq Ep_{\alpha_0}(E_1)$. Par suite, si α_1 est la direction de minceur de E_1 , on a, pour tout $\beta \in]\alpha_1, \alpha_0[$, $Ep_\beta(E_1) < Ep_{\alpha_0}(E_1)$.

Mais si $|\alpha_0 - \beta|$ est suffisamment petit, on a, en vertu de la continuité de

$Ep_\beta(E_2)$ (par rapport à β), $Ep_\beta(E_2) < Ep_{\alpha_0}(E_1)$. Donc,

$Ep_\beta(E_1, E_2) = \max [Ep_\beta(E_1), Ep_\beta(E_2)] < Ep_{\alpha_0}(E_1) = Ep(E_1, E_2)$, ce qui est absurde.

Cela étant, considérons deux droites L', L'' de pente α_0 telles que L' passe par un point entier P_0 (par exemple $P_0 = \dot{O}$) et $h(L'') - h(L') = Ep_{\alpha_0}(E_1) = Ep_{\alpha_0}(E_2)$.

Soit P_1 (resp. P_2) un point entier quelconque de E_1 (resp. E_2) dont la α -hauteur est minimale. Appliquons aux courbes E_1 et E_2 des translations entières qui amènent leur point P_1, P_2 respectif au point P_0 . Alors E_1 et E_2 seront considérées comme contenues dans la bande fermée $[L', L'']$ et les points de α -hauteur minimale de ces courbes se trouveront sur L' . Soit E la réunion de E_1 et E_2 (placées comme précédemment). Alors, L', L'' sont les α -tangentes inférieure et supérieure de E et $\alpha_0 \in \mu(E)$. Posons $E'_1 = E_1 \cap L'$, $E''_1 = E_1 \cap L''$, $E'_2 = E_2 \cap L'$, $E''_2 = E_2 \cap L''$, et soient $\bar{E}'_1, \bar{E}''_1, \bar{E}'_2, \bar{E}''_2$ les projections horizontales respectives de ces ensembles.

Comme $Ep_{\alpha_0}(E_1) = Ep_{\alpha_0}(E_2) \geq 1 > Ep(E_i)$ ($i = 1, 2$), on a

$\alpha_0 \notin \mu(E_1) = \{\alpha_1\}$, $\alpha_0 \notin \mu(E_2) = \{\alpha_2\}$ mais $\alpha_0 \in \mu(E)$. Par suite, si

$\bar{L}'_1, \bar{L}''_1, \bar{L}'_2, \bar{L}''_2$ sont les plus petits segments de l'axe X_1 des abscisses contenant respectivement $\bar{E}'_1, \bar{E}''_1, \bar{E}'_2, \bar{E}''_2$, on a, $\bar{L}'_1 \cap \bar{L}''_1 = \bar{L}'_2 \cap \bar{L}''_2 = \emptyset$

tandis que les plus petits segments $\bar{L}', \bar{L}''$ de X_1 contenant respectivement

$\bar{E}' = \bar{E}'_1 \cup \bar{E}'_2$, $\bar{E}'' = \bar{E}''_1 \cup \bar{E}''_2$ ne sont pas disjoints [cela résulte de (5.3.6) et

du lemme précédent]. Ce qui précède est vrai quel que soit le choix des points

P_1, P_2 de α -hauteur minimale sur E_1, E_2 respectivement. Comme $\bar{L}'_1 \cap \bar{L}''_1 = \emptyset$,

le segment $\bar{L}''_1$ se trouve d'un certain côté de $\bar{L}'_1$ et de même, $\bar{L}''_2$ se trouve d'un

certain côté de $\bar{L}'_2$. Supposons que ce côté soit le même dans les deux cas.

Choisissons comme P_1, P_2 des points extrêmes de E_1, E_2 respectivement, de

α -hauteur minimale et dont les projections horizontales sont du côté considéré

de $\bar{L}'_1$. Alors, si $\bar{P}_0$ est la projection horizontale de P_0 , les segments $\bar{L}'_1$, $\bar{L}'_2$ ont $\bar{P}_0$ comme une de leurs extrémités et sont situés du même côté par rapport à ce point, donc $\bar{L}' = \bar{L}'_1 \cup \bar{L}'_2$ est aussi un segment dont l'une des extrémités est $\bar{P}_0$ et qui est situé du même côté de $\bar{P}_0$ que $\bar{L}'_1$ et $\bar{L}'_2$. Par contre, les segments $\bar{L}''_1$, $\bar{L}''_2$ et $\bar{L}'' = \bar{L}''_1 \cup \bar{L}''_2$ sont situés du côté de $\bar{P}_0$ opposé au précédent.

Par suite, on a $\bar{L}' \cap \bar{L}'' = \emptyset$, ce qui contredit l'hypothèse $\alpha \in \mu(E_1 \cup E_2)$ [(5.3.6)]. Cela prouve que les ordres (dans lesquels se suivent), sur X_1 les segments $\bar{L}'_1$, $\bar{L}''_1$ d'une part, et les segments $\bar{L}'_2$, $\bar{L}''_2$ de l'autre, sont opposés. Supposons, par exemple, que $\bar{L}'_1$ précède $\bar{L}''_1$, tandis que $\bar{L}''_2$ précède $\bar{L}'_2$ et que $\bar{L}'_1 = [\bar{A}'_1, \bar{B}'_1]$, $\bar{L}''_1 = [\bar{A}''_1, \bar{B}''_1]$, $\bar{L}'_2 = [\bar{A}'_2, \bar{B}'_2]$, $\bar{L}''_2 = [\bar{A}''_2, \bar{B}''_2]$. Alors on a, $\bar{A}'_1 \leq \bar{B}'_1 < \bar{A}''_1 \leq \bar{B}''_1$ et $\bar{A}''_2 \leq \bar{B}''_2 < \bar{A}'_2 \leq \bar{B}'_2$. Soient A'_i, B'_i (resp. A''_i, B''_i) ($i = 1, 2$) les points de L' (resp. L'') de projections horizontales $\bar{A}'_i, \bar{B}'_i$ (resp. $\bar{A}''_i, \bar{B}''_i$). Il est clair que A'_i, A''_i, B'_i, B''_i sont des points de E_i ($i = 1, 2$). Soit T la translation telle que $T.B'_1 = B''_2 - e_2$. Alors, on a $h_\alpha(T) + h_\alpha(B'_1) = h_\alpha(B''_2) - 1$.

Comme $B'_1 \in L'$ et $B''_2 \in L''$, on aura aussi $h_\alpha(T) = h_\alpha(B''_2) - h_\alpha(B'_1) - 1 = h(L'') - h(L') - 1 = \text{Ep}_{\alpha_0}(E_1) - 1 \geq 0$. De plus, l'abscisse $\overline{T.A''_1}$ de $T.A''_1$ peut être : a) au plus égale à celle de A'_2 ou b) peut lui être strictement supérieure. Dans le cas a), on a $\overline{T.A''_1} \in [\overline{B''_2}, \bar{A}'_2] \subseteq \bar{E}_2$ ($\bar{E}_2$ désigne la projection horizontale de E_2), car $\bar{A}''_1 > \bar{B}'_1$ implique $\overline{T.A''_1} > \overline{T.B'_1} = \bar{B}''_2$. Il existe donc un point $C_2 \in E_2$ de projection horizontale $\overline{T.A''_1} > \bar{B}''_2$. On a, par conséquent, $h_{\alpha_0}(C_2) < h(L'')$, tandis que $h_{\alpha_0}(T.A''_1) = h_\alpha(T) + h_\alpha(A''_1) \geq h_\alpha(A''_1) = h(L'')$. Ainsi le point $T.B'_1 = B''_2 - e_2 \in T.E_1$ se trouve au-dessous du point de même abscisse $B''_2 \in E_2$, tandis que le point $T.A''_1 \in T.E_1$ se trouve au-dessus du point de même abscisse $C_2 \in E_2$. Donc $T.E_1$ et E_2 se traversent.

Dans le cas b), il existe un point $C_1 \in E_1$ tel que l'abscisse de $T C_1$ soit $\bar{A}_2'$ et $h_\alpha(T C_1) = h_\alpha(T) + h_\alpha(C_1) \geq h_\alpha(C_1) > h_\alpha(L')$, tandis que $h_\alpha(A_2') = h(L')$. Donc, $T B_1' \in T.E_1$ est au-dessous de $B_2'' \in E_2$, tandis que $T.C_1 \in T.E_1$ est au-dessus de A_2' . Ainsi, dans tous les cas, $T E_1$ et E_2 se traversent contrairement à l'hypothèse. On a donc, $Ep_{c_0}(E_1, E_2) < 1$, ce qui achève la démonstration du théorème.

(7.3.3) Pour terminer avec le cas $s = 2$, on va étudier la manière de déterminer toutes les courbes de préévaluation (dans R_+^2) ayant les points de base donnés $P_1 = (m, 0)$ et $P_2 = (0, n)$ avec $n \leq m$.

Supposons que $\mathfrak{Q}^*$ soit une courbe de préévaluation dans R_+^2 et passant par les points P_1 et P_2 et soit $\mathfrak{Q}$ la courbe de préévaluation dans R^2 telle que $\mathfrak{Q}^*$ soit une courbe partielle de $\mathfrak{Q}$. On considère $\mathfrak{Q}_q^{(*)}(\Lambda)$, où $\Lambda = (l_1, l_2, \dots, l_q)$, la période minimale de $\mathfrak{Q}$. On a

$$(1) \quad (l_1 + 1)n > m - n \geq l_1(n-1)$$

En effet, la courbe $\mathfrak{Q}^*$ contient $n-1$ paliers $\mathfrak{Q}_1 = (l_1+1)\mathfrak{Q}_0 + \mathfrak{T}_0$ ou pentes $\mathfrak{T}_1 = l_1\mathfrak{Q}_0 + \mathfrak{T}_0$ d'ordre 1, dont les projections horizontales sont de longueurs $a_1 = l_1+2$ et $b_1 = l_1+1$. Ces paliers et pentes d'ordre 1 sont précédés par le "palier initial" $\lambda_1\mathfrak{Q}_0 + \mathfrak{T}_0$, où λ_1 est tel que $0 \leq \lambda_1 \leq l_1+1$. En plus, il doit y avoir au moins une pente $\mathfrak{T}_1$ d'ordre 1. On a donc $n(l_1+2) > m \geq (n-1)(l_1+1) + 1$, ce qui équivaut aux inégalités (1) précédentes.

On peut supposer (en accord avec le problème algébrique qui est à l'origine de cette étude (4.1)), que l'entier n est au moins égal à 2. Cela étant, les inégalités (1) sont équivalentes aux inégalités

$$(2) \quad \frac{m-2n}{n} < l_1 \leq \frac{m-n}{n-1}.$$

(*) où, toutefois, si $\Lambda = \emptyset$, on prend cette période = $\mathfrak{T}_0$ et non $\mathfrak{Q}_0$.

Soit l_1 une valeur entière non-négative quelconque satisfaisant aux inégalités (2) (il en existe une, car, on a $\frac{m-n}{n-1} - \frac{m-2n}{n} = 1 + \frac{m-n}{n^2-n}$).

Déterminons les valeurs prises par le nombre p_1 (resp. $n_1 = n-1-p_1$) de paliers $\mathfrak{Q}_1$ (resp. pentes $\mathfrak{P}_1$) d'ordre 1 dans la décomposition de $\mathfrak{Q}^*$ sous la forme

$$\mathfrak{Q}^* = (\lambda_1 \mathfrak{Q}_0 + \mathfrak{P}_0) + \mathfrak{Q}^{*(1)}$$

où $\mathfrak{Q}^{*(1)}$ est une somme de courbes de la forme $\mathfrak{Q}_1$ ou $\mathfrak{P}_1$. L'entier p_1 est, bien entendu, supposé être au moins égal à 0. On a

$$p = m-n = \lambda_1 + p_1(l_1+1) + n_1 l_1 \quad \text{et} \quad n-1 = p_1 + n_1,$$

donc
$$m-n = \lambda_1 + (n-1)l_1 + p_1.$$

Autrement dit,
$$\lambda_1 + p_1 = m-n - (n-1)l_1 \geq 0.$$

Il en résulte pour p_1 , puisque l'on a $0 \leq \lambda_1 \leq l_1 + 1$ et $\mathfrak{Q}^{*(1)}$ contient au moins un $\mathfrak{P}_1$, les inégalités

$$\min(n-2, m-n - (n-1)l_1) \geq p_1 \geq m-n(l_1+1) - 1$$

et on a
$$\lambda_1 = m-n - (n-1)l_1 - p_1 \quad \text{et} \quad n_1 = n-1 - p_1 \geq 0.$$

Ensuite, ayant fixé l_1 et p_1 (donc aussi λ_1), représentons maintenant $\mathfrak{Q}^*$ sous la forme
$$\mathfrak{Q}^* = \lambda_1 \mathfrak{Q}_0 + \mathfrak{P}_0 + \lambda_2 \mathfrak{Q}_1 + \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{Q}^{*(2)} + \lambda'_2 \mathfrak{Q}_1,$$
 où les entiers non-négatifs $\lambda_1, \lambda_2, \lambda'_2$ sont tels que $0 \leq \lambda_2 \leq l_2 + 1$, $0 \leq \lambda'_2 \leq l_2 + 1$ et $\lambda_1 = l_1 + 1$ exclut $\lambda_2 = l_2 + 1$ (car, si $\lambda_1 = l_1 + 1$ et $\lambda_2 = l_2 + 1$, la courbe $\mathfrak{Q}$ comporterait une succession de l_2+2 paliers d'ordre 1, ce qui contredit la définition de la courbe $\mathfrak{Q}$), $\mathfrak{Q}^{*(2)}$ étant une somme de courbes de la forme $\mathfrak{Q}_2$ ou $\mathfrak{P}_2$, qui contient au moins un $\mathfrak{P}_2$ quand elle n'est pas réduite à un point.

Le nombre de pentes d'ordre 1 dans $\mathfrak{Q}^{*(2)}$ est, de façon évidente, égal à n_1-1 , donc, celui des paliers d'ordre 1 contenu dans $\mathfrak{Q}^{*(2)}$, qui est $p_1 - \lambda_2 - \lambda'_2$, est compris entre $l_2(n_1-1)$ et $(l_2+1)(n_1-1) - 1$. Comme

$0 \leq \lambda_2 + \lambda'_2 \leq 2(l_2 + 1)$, on a

$$l_2(n_1 - 1) \leq p_1 < (l_2 + 1)(n_1 + 1).$$

Ce qui donne

$$\frac{p_1 - n_1 - 1}{n_1 + 1} < l_2 \leq \frac{p_1}{n_1 - 1} \quad (\text{on a : } \frac{p_1}{n_1 - 1} - \frac{p_1 - n_1 - 1}{n_1 + 1} = 1 + \frac{2p_1}{n_1^2 - 1},$$

ce qui garantit la possibilité du choix de l'entier non-négatif l_2).

Ayant choisi une valeur de l_2 , on cherche le nombre possible p_2 (resp. n_2) des paliers $\mathfrak{S}_2$ (resp. pentes $\mathfrak{P}_2$) d'ordre 2 dans $\mathfrak{S}^{*(2)}$. On a

$$p_1 = p_2(l_2 + 1) + n_2 l_2 + \lambda_2 + \lambda'_2 \text{ et } p_2 + n_2 = n_1 - 1.$$

Ce qui donne $p_1 = (n_1 - 1)l_2 + p_2 + \lambda_2 + \lambda'_2$.

Donc, puisque $0 \leq \lambda_2 + \lambda'_2 \leq 2(l_2 + 1)$, on aura

$$p_1 - (n_1 - 1)l_2 - 2(l_2 + 1) \leq p_2 \leq p_1 - (n_1 - 1)l_2,$$

ce qui permet, de façon évidente, de choisir p_2 . Ayant choisi p_2 , on doit avoir

$$\lambda_2 + \lambda'_2 = p_1 - (n_1 - 1)l_2 - p_2 \quad \text{et} \quad n_2 = n_1 - 1 - p_2.$$

Ensuite, on partage plus ou moins arbitrairement $p_1 - (n_1 - 1)l_2 - p_2$ en deux parties entières λ_2 et λ'_2 , en ayant toutefois soin de choisir λ_2 au plus égal à l_2 , si $\lambda_1 = l_1 + 1$.

On voit, facilement, comment on continue la détermination des entiers non-négatifs $l_{q'}$, $p_{q'}$, $n_{q'}$, $\lambda_{q'}$, $\lambda'_{q'}$, ($1 \leq q' \leq q$), en faisant, bien entendu, attention aux valeurs non permises de $\lambda_{q'}$ et $\lambda'_{q'}$, qui contredisent la "préévaluation" de la courbe $\mathfrak{S}$ (on convient de prendre $\lambda'_1 = 0$).

Il est clair, d'après ce qui précède, que l'on arrive à déterminer toutes les courbes de préévaluation dans $\mathbb{R}_+^2$ passant par les points P_1 et P_2 .

En principe, la donnée en plus de $l = (l_1, l_2, \dots, l_q)$ des $\lambda_{q'}$, $\lambda'_{q'}$ ($1 \leq q' \leq q$) peut être remplacée par celle de l'abscisse ou de l'ordonnée du début de la première période complète $\mathfrak{P}_q(1)$ contenue dans $\mathfrak{S}^*$ ou encore par celle de la place, dans la période, du point initial de la courbe $\mathfrak{S}^*$ et d'autres manières encore.

CARACTÉRISATION PLUS EXPLICITE
DES HYPERSURFACES INDEFINIES LIMITES DE PREVALUATION DANS Z^s ($s \geq 3$)

§ (8.1)

On conserve les notations adoptées dans les chapitres précédents.

(3.1.1) Soit $E \subseteq Z^s$ une hypersurface indéfinie limite. On considère l'hyperplan $H_j = \{(i_1, \dots, i_s) \in Z^s ; i_s = j\}$ de Z^s . Comme $(\text{int}.E, \text{ext}.E)$ est une partition de Z^s [(5.1.2)], il est clair que $(H_j \cap \text{int}.E, H_j \cap \text{ext}.E)$ est une partition de H_j , et si l'on projette cette dernière partition sur $Z^{s-1} = H_0$ [par la projection $p_s : (i_1, \dots, i_{s-1}, i_s) \rightarrow (i_1, \dots, i_{s-1})$ parallèle à l'axe des i_s] on voit que l'on obtient une partition de Z^{s-1} produite par une hypersurface indéfinie limite [(5.1.1), remarque 3]. Cette hypersurface, notée E_j^{s-1} et dite j-section proximale de E, n'est autre chose que l'ensemble des points limites de la partition précédente [par analogie avec les monômes limites définis dans (3.3.5)], c'est-à-dire l'ensemble des $P \in p_s.(H_j \cap \text{ext}.E)$ tels qu'il existe un entier q ($1 \leq q < s$) tel que $P - e_q \in p_s.(H_j \cap \text{int}.E)$.

Il est clair que si des translatées entières quelconques de E ne se traversent pas, il en sera de même des translatées entières quelconques des E_j^{s-1} , quel que soit $j \in Z$ et qu'en plus, quels que soient $j, j' \in Z$, des translatées entières quelconques de E_j^{s-1} et de $E_{j'}^{s-1}$ ne se traversent pas non plus. Ainsi

(1) Si E est de prévaluation, les E_j^{s-1} sont aussi de prévaluation et leurs translatées entières mutuelles ne se traversent pas.

Supposons que les E_j^{s-1} sont de prévaluation et que leurs translatées entières ne se traversent pas. On considère une translation entière quelconque $T = (t_1, \dots, t_{s-1}, t_s) \in Z^s$, elle se représente sous la forme $T = T^{s-1} + t_s e_s$ où $T^{s-1} = (t_1, \dots, t_{s-1}, 0)$ est parallèle à Z^{s-1} et $t_s e_s$ est parallèle à ^{s-1}Z .

Si $E' = T.E$ et si E_j^{s-1} et la j -section proximale de E' , il est clair que l'on a

$$E_{j+t_s}^{s-1} = T^{s-1}.E_j^{s-1}.$$

Donc, si l'on tient compte de (1), on a

(2) E et E' ne se traversent pas si, et seulement si, pour tout t_s , on a, en même temps et pour tous les j , $E_{j+t_s}^{s-1} = T^{s-1}.E_j^{s-1} \subseteq \text{ext}.E_{j+t_s}^{s-1}$ ou

$$E_{j+t_s}^{s-1} = T^{s-1}.E_j^{s-1} \subseteq \text{int}.E_{j+t_s}^{s-1}.$$

Comme T est arbitraire, E est de préévaluation si et seulement si la condition précédente est satisfaite pour toute $\bar{T} = T^{s-1} \in Z^s$ et tout $t_s \in Z$.

Remarque. Si E est périodique [(5.2) remarque 5], tous les E_j^{s-1} le sont aussi.

En effet, E possède alors $s-1$ périodes linéairement indépendantes, ce qui permet, en les exprimant comme combinaisons linéaires (sur Z) des $e_1, \dots, e_s$ et en éliminant ensuite e_s , d'obtenir au moins $s-2$ combinaisons linéaires des e_t autres que e_s , qui sont linéairement indépendantes.

Ces combinaisons linéaires sont évidemment des translations de Z^{s-1} qui préservent tous les E_j^{s-1} . Enfin, il ne peut pas y avoir plus de $s-2$ translations linéairement indépendantes préservant tout E_j^{s-1} , car alors E_j^{s-1} ne serait pas une hypersurface indéfinie limite. Ainsi, les E_j^{s-1} sont toutes périodiques (et admettent même $s-2$ périodes communes et linéairement indépendantes).

(8.1.2) On conserve les données et les notations de (8.1.1).

On suppose maintenant que :

(A) On sait caractériser (par des invariants associés) les hypersurfaces indéfinies limites de préévaluation et périodiques dans Z^{s-1} et que

(B) deux hypersurfaces du type de celles considérées dans (A), dont les translatées entières ne se traversent pas, sont égales à une translation près (c'est-à-dire, sont telles que chacune est une translatée de l'autre).

Remarque. Les hypothèses (A) et (B) précédentes sont satisfaites pour $s-1 = 2$

Cela résulte de (5.7.4) (corollaire 3 et sa démonstration) et des théorèmes (6.3.2), (6.3.3).

Soit $E \subseteq Z^s$ une hypersurface indéfinie limite telle que tous les E_j^{s-1} soient des translatées d'une même hypersurface indéfinie limite de préévaluation $\bar{E} = E_0^{s-1} \subseteq Z^{s-1}$ et que le groupe ordonné $\mathcal{G}_{\bar{E}} = Z^{s-1}/\mathfrak{N}_{\bar{E}}$ possède un plus petit élément strictement positif $\bar{\tau}_0 = \bar{T}_0 + \mathfrak{N}_{\bar{E}}$, ce qui est certainement vrai si E est de préévaluation et périodique [(8.1.1), (2) ; hypothèse (B) ; (5.1.3), proposition 2, (a)]. Alors, quels que soient les entiers $j, h \in Z$ et quelle que soit la translation $\bar{T} \in Z^{s-1}$, les ensembles $\bar{T}.E_j^{s-1}$ et $\bar{T}.E_{j+h}^{s-1}$ ne se traversent pas. Mais on montre, en plus, que

(1) il existe, pour tout $h \in Z$, le plus petit élément $\bar{\tau}(h) = \bar{T}(h) + \mathfrak{N}_{\bar{E}}$ de $\mathcal{G}_{\bar{E}}$ tel que

$$\bar{T}(h).E_j^{s-1} \subseteq \text{ext}.E_{j+h}^{s-1}$$

pour tout $j \in Z$.

En effet, comme E_h^{s-1} est une translatée de $\bar{E}$, il existe une translation $\bar{T}'(h) \in Z^{s-1}$ telle que $\bar{T}'(h).\bar{E} = E_h^{s-1}$. Mais $[\bar{T}'(h) - \bar{T}_0].\bar{E} = -\bar{T}_0.E_h^{s-1}$, on a, par conséquent,

$$(a) [\bar{T}'(h) - \bar{T}_0].\bar{E} \subseteq \overline{\text{int}.E_h^{s-1}} \text{ et } [\bar{T}'(h) - \bar{T}_0].\bar{E} \cap \text{int}.E_h^{s-1} \neq \emptyset,$$

$$(b) [\bar{T}'(h) + \bar{T}_0].\bar{E} = \bar{T}_0.E_h^{s-1} \subseteq \text{ext}.E_h^{s-1}.$$

Les inclusions (a) et (b) entraînent

$$(c) [\bar{T}'(h) - \bar{T}_0].E_j^{s-1} \subseteq \overline{\text{int}.E_{j+h}^{s-1}} \text{ et } [\bar{T}'(h) - \bar{T}_0].E_j^{s-1} \cap \text{int}.E_{j+h}^{s-1} \neq \emptyset$$

$$(d) [\bar{T}'(h) + \bar{T}_0].E_j^{s-1} \subseteq \text{ext}.E_{j+h}^{s-1}.$$

Comme $\bar{\tau}'(h) = \bar{T}'(h) + \mathfrak{N}_{\bar{E}}$ est le seul élément $\bar{\tau} \in \mathcal{G}_{\bar{E}}$ tel que

$\bar{T}'(h) - \bar{T}_0 + \mathfrak{N}_{\bar{E}} = \bar{\tau}'(h) - \bar{\tau}_0 < \bar{\tau} < \bar{\tau}'(h) + \bar{\tau}_0 = \bar{T}'(h) + \bar{T}_0 + \mathfrak{N}_{\bar{E}}$, il résulte de (c) et (d) que

$\tau(h) = \bar{\tau}'(h)$ ou $\bar{\tau}(h) = \bar{\tau}'(h) + \bar{\tau}_0$ selon que l'on a, pour tout $j \in \mathbb{Z}$,

$\bar{\tau}'(h).E_j^{s-1} \subseteq \text{ext}.E_{j+h}^{s-1}$ ou qu'on ne l'a pas.

Remarque 1. Pour tout entier $q = 1, 2, \dots, s-1$, on a $\bar{T}(h) \leq -h e_q$.

En effet, on a $h(e_s - e_q).E \subseteq \text{ext}.E$

Cela étant, on pose

$$(2) \quad \bar{T}(h).E_j^{s-1} = \bar{S}(j, h).E_{j+h}^{s-1} \text{ avec } \bar{S}(j, h) \in \mathbb{Z}^{s-1}$$

[ceci équivaut à $(\bar{T}(h) - \bar{S}(j, h)).E_j^{s-1} = E_{j+h}^{s-1}$, d'où résulte

$$\bar{\tau}(h+h') - \bar{\sigma}(j, h+h') = \bar{\tau}(h) + \bar{\tau}(h') - \bar{\sigma}(j, h) - \bar{\sigma}(j+h, h'), \text{ avec}$$

$$\bar{\sigma}(j, h) = \bar{S}(j, h) + \frac{h}{E}].$$

Il est clair, d'après la définition de $\bar{T}(h)$ et $\bar{S}(j, h)$, que l'on a $\bar{\sigma}(j, h) \geq 0$. Mais

(3) si pour toute translation $T \in \mathbb{Z}^s$, les ensembles $T.E$ et E ne se traversent pas, on n'a pas $\bar{\sigma}(j, h) > \bar{\tau}_0$ quel que soit $j \in \mathbb{Z}$.

En effet, si on avait $\bar{\sigma}(j, h) > \bar{\tau}_0$ quel que soit $j \in \mathbb{Z}$, on aurait $(\bar{T}(h) - \bar{\tau}_0).E_j^{s-1} = (\bar{S}(j, h) - \bar{\tau}_0).E_{j+h}^{s-1} \subseteq \text{ext}.E_{j+h}^{s-1}$ [car on a supposé que $\bar{\sigma}(j, h) - \bar{\tau}_0 > 0$], donc contrairement à la définition de $\bar{T}(h)$, on n'aurait pas $[\bar{T}(h) - \bar{\tau}_0].E_j^{s-1} \subseteq \overline{\text{int}.E_{j+h}^{s-1}}$ et $[\bar{T}(h) - \bar{\tau}_0].E_j^{s-1} \cap \text{int}.E_{j+h}^{s-1} \neq \emptyset$.

Toujours d'après la définition de $\bar{T}(h)$, on a aussi

(4) si pour toute translation $T \in \mathbb{Z}^s$, les ensembles $T.E$ et E ne se traversent pas, on n'a pas $\bar{\sigma}(j, h) = \bar{\tau}_0$ quel que soit $j \in \mathbb{Z}$.

En effet, si on avait $\bar{\sigma}(j, h) = \bar{\tau}_0$ quel que soit $j \in \mathbb{Z}$, on aurait $[\bar{T}(h) - \bar{\tau}_0].E_j^{s-1} = E_{j+h}^{s-1}$ quel que soit $j \in \mathbb{Z}$, ce qui comme plus haut, contredirait encore la définition de $\bar{T}(h)$.

(5) Si, quels que soient $j \in \mathbb{N}$ et $h \in \mathbb{Z}$, l'on a $0 \leq \bar{\sigma}(j, h) \leq \bar{\tau}_0$, sans que l'on ait, pour un $h \in \mathbb{Z}$, l'égalité $\bar{\sigma}(j, h) = \bar{\tau}_0$ identiquement pour tout j , alors pour toute translation $T \in \mathbb{Z}^s$, les ensembles $T.E$ et E ne se traversent pas.

En effet, soit $T = \bar{T} + h e_s$ une translation de Z^S (où $\bar{T}$ est une translation de Z^{S-1}), on a ou bien $\bar{T} + \frac{\mathfrak{N}}{E} \geq \bar{T}(h) + \frac{\mathfrak{N}}{E}$, dans ce cas, pour tout $j \in \mathbb{N}$, on aura $(T.E)_{j+h}^{S-1} = \bar{T}.E_j^{S-1} \subseteq \text{ext.}[\bar{T}(h).E_j^{S-1}] \subseteq \text{ext.}E_{j+h}^{S-1}$, car $\bar{T}(h).E_j^{S-1} \subseteq \text{ext.}E_{j+h}^{S-1}$, ou bien $\bar{T} + \frac{\mathfrak{N}}{E} \leq \bar{T}(h) - \bar{T}_0 + \frac{\mathfrak{N}}{E}$, auquel cas $(T.E)_{j+h}^{S-1} \subseteq \text{int.}[(\bar{T}(h) - \bar{T}_0).E_j^{S-1}] = \text{int.}[(\bar{S}(j, h) - \bar{T}_0).E_{j+h}^{S-1}] \subseteq \text{int.}E_{j+h}^{S-1}$, car $\bar{S}(j, h) - \bar{T}_0 + \frac{\mathfrak{N}}{E} = \bar{o}(j, h) - \bar{\tau}_0 \leq 0$. Le résultat (5) résulte alors de (2) plus haut.

Posons

$$(6) \quad \bar{o}(j, h) = s(j, h)\bar{\tau}_0.$$

$$(7) \quad j\bar{T}(1).E_0^{S-1} = \bar{U}(j).E_j^{S-1}.$$

Il est clair que

$$(8) \quad s(j, h) \text{ est égal à } 0 \text{ ou à } 1.$$

En outre, $j\bar{T}(1).E_0^{S-1} = \bar{T}(1).[(j-1)\bar{T}(1).E_0^{S-1}] = \bar{T}(1)[\bar{U}(j-1).E_{j-1}^{S-1}] = [\bar{T}(1) + \bar{U}(j-1)].E_{j-1}^{S-1} = \bar{U}(j-1).[\bar{T}(1).E_{j-1}^{S-1}] = \bar{U}(j-1).[\bar{S}(j-1, 1).E_j^{S-1}] = [\bar{U}(j-1) + \bar{S}(j-1, 1)].E_j^{S-1}$, d'où résulte $\bar{U}(j) \equiv \bar{U}(j-1) + \bar{S}(j-1, 1) \pmod{\frac{\mathfrak{N}}{E}}$ et si $\bar{u}(j) = \bar{U}(j) + \frac{\mathfrak{N}}{E}$, $\bar{u}(j) - \bar{u}(j-1) = \bar{o}(j-1, 1)$. Donc, puisque $\bar{U}(0) \equiv 0 \pmod{\frac{\mathfrak{N}}{E}}$ (car $E_0^{S-1} = 0.E_0^{S-1}$), on aura, par itération, sur j

$$(9) \quad \bar{u}(j) = \sum_{q=0}^{j-1} \bar{o}(q, 1) = \left[\sum_{q=0}^{j-1} s(q, 1) \right] \bar{\tau}_0.$$

Comme $\bar{o}(q, 1)$ est égal à 0 ou à $\bar{\tau}_0$, on voit que $\bar{u}(j)$ est un multiple de $\bar{\tau}_0$ à coefficient entier non négatif. On pose

$$(10) \quad \bar{u}(j) = n(j)\bar{\tau}_0 \text{ où } n(j) = \sum_{q=0}^{j-1} s(q, 1) \geq 0.$$

Comme $\bar{T}(j).E_0^{S-1} = \bar{S}(0, j).E_j^{S-1}$ et compte tenu de (7), on aura

$$(11) \quad j \bar{\tau}(1) - \bar{\tau}(j) = \bar{u}(j) - \bar{\sigma}(0, j).$$

Donc, d'après (10) et (6), $j\bar{\tau}(1) - \bar{\tau}(j) = [n(j) - s(0, j)]\bar{\tau}_0$ est un multiple de $\bar{\tau}_0$.

(il est à remarquer que, si $\bar{E}$ est périodique, $\bar{\tau}(1)$ et $\bar{\tau}(j)$ sont déjà des multiples de $\bar{\tau}_0$, mais dans les autres cas cela ne peut pas être vrai). Posons

$$(12) \quad n(j, h) = n(j+h) - n(j) \text{ et } i(j) = n(0, j) + j = n(j) + j.$$

On a $n(j, h) = \sum_{q=j}^{j+h-1} s(q, 1)$ [d'après (10)]. Considérons l'expression

$$N(j, j', h) = [i(j+h) - i(j)] - [i(j'+h) - i(j')] = [n(j+h) - n(j) + h] - [n(j'+h) - n(j') + h] = [n(j+h) - n(j)] - [n(j'+h) - n(j')], \text{ où } j, j' \in \mathbb{Z} \text{ et } h \in \mathbb{N}.$$

Comme, d'après (10) et (11), $n(j)\bar{\tau}_0 = \bar{u}(j) = j\bar{\tau}(1) - \bar{\tau}(j) + \bar{\sigma}(0, j)$, on aura

$$N(j, j', h)\bar{\tau}_0 = [(j+h-j) - (j'+h-j')]\bar{\tau}(1) - [\bar{\tau}(j+h) - \bar{\tau}(j) - \bar{\sigma}(0, j+h) + \bar{\sigma}(0, j)] + [\bar{\tau}(j'+h) - \bar{\tau}(j') - \bar{\sigma}(0, j'+h) + \bar{\sigma}(0, j')].$$

Or, on a vu [(2)] que

$$\bar{\tau}(j+h) - \bar{\sigma}(0, j+h) = [\bar{\tau}(j) - \bar{\sigma}(0, j)] + [\bar{\tau}(h) - \bar{\sigma}(j, h)].$$

$$(13) \quad N(j, j', h)\bar{\tau}_0 = [\bar{\tau}(h) - \bar{\sigma}(j', h)] - [\bar{\tau}(h) - \bar{\sigma}(j, h)] = \bar{\sigma}(j, h) - \bar{\sigma}(j', h) = [s(j, h) - s(j', h)]\bar{\tau}_0.$$

Donc, si pour tout $j \in \mathbb{Z}$ et tout $h \in \mathbb{N}$ on a $s(j, h) \geq 0$ sans que l'on ait, pour un h et pour tous les j , l'inégalité stricte $s(j, h) > 0$, la condition $|N(j, j', h)| \leq 1$ ($\forall j, j' \in \mathbb{Z}, \forall h \in \mathbb{N}$) équivaut à $s(j, h) \leq 1$ ($\forall j \in \mathbb{Z}, \forall h \in \mathbb{N}$).

En effet, $0 \leq s(j, h) \leq 1$ et $0 \leq s(j', h) \leq 1$ entraînent $|N(j, j', h)| \leq 1$.

D'autre part, si l'on choisit j' tel que $s(j', h) = 0$, on a

$$|N(j, j', h)| = |s(j, h)| = s(j, h), \text{ donc; } |N(j, j', h)| \leq 1 \text{ entraîne } s(j, h) \leq 1,$$

ce qui prouve l'équivalence annoncée.

Ainsi, si l'on tient compte de (5), on a

(14) sous l'hypothèse $s(j, h) \geq 0$ sans que, pour un h , on ait $s(j, h) > 0$ pour tout j , on aura la conclusion suivante : E est de préévaluation dans Z^S si et seulement si la fonction $i(j)$ est la deuxième fonction caractéristique d'une courbe indéfinie limite de préévaluation dans Z^2 [auquel cas on a $n(j, h) = n_j(h)$ et $n(j) = n_0(j)$].

Comme $n(j, 1) = \sum_{q=j}^j s(q, 1) = s(j, 1)$, on a, pour tout j , les inégalités

$0 \leq n(j, 1) \leq 1$, ce qui montre, si $S[\theta = (\Lambda = (1_1, \dots, 1_q, \dots ; q < \sigma < +\infty), \xi)]$ est la courbe de R^2 [(6.3.1)] telle que la fonction $i(j)$ précédente soit la deuxième fonction caractéristique de $S(\theta) \cap Z^2$, que l'on a $1_1 = 0$. Donc $S(\theta)$ est hélicoïdalement réduite et l'on voit que

$$(15) \quad E_j^{s-1} = [j\bar{T}(1) - \bar{U}(j)] \cdot E_o^{s-1} = [j\bar{T}(1) - n(j)\bar{T}_o] \cdot E_o^{s-1} = \\ = [j(\bar{T}(1) + \bar{T}_o) - i(j)\bar{T}_o] \cdot E_o^{s-1}.$$

Il en résulte, tout d'abord, que

(16) E est complètement déterminée par l'hypersurface E_o^{s-1} (de Z^{s-1}) de forme $\bar{E}$ (donc, à une translation près, par $\bar{E}$), par l'invariant $\bar{T}(1)$ et ceux Λ, ξ de la courbe $S(\theta)$, où $\theta = \Lambda, \xi$).

ensuite, que

(17) les invariants indiqués dans (16) qui déterminent E, déterminent aussi, pour tout $h \in \mathbb{N}$, l'élément $\bar{\tau}(h)$ et la fonction $s(j, h)$, cette dernière fonction étant déterminée par $i(j)$ (donc par Λ et ξ) seulement.

En effet, $\bar{\tau}(h)$ est le plus petit élément de $\mathcal{C}_{\bar{E}}$ tel que, pour tout

$j \in \mathbb{Z}$, l'on ait

$$j \bar{\tau}(1) - n(j)\bar{T}_o + \bar{\tau}(h) \geq (j+h)\bar{\tau}(1) - n(j+h)\bar{T}_o, \text{ ce qui entraîne}$$

$$\bar{\tau}(h) - h \bar{\tau}(1) = \max_{j \in \mathbb{Z}} [n(j) - n(j+h)] \text{ et}$$

$$s(j, h)\bar{T}_o = [\bar{\tau}(h) + j \bar{\tau}(1) - n(j)\bar{T}_o] - [(j+h)\bar{\tau}(1) - n(j+h)\bar{T}_o] = \\ = [\bar{\tau}(h) - h \bar{\tau}(1)] + [n(j+h) - n(j)]\bar{T}_o = \max_{q \in \mathbb{Z}} [n(q) - n(q+h)]\bar{T}_o + [n(j+h) - n(j)]\bar{T}_o.$$

Supposons maintenant que $i(j)$ soit la fonction du même nom d'une courbe indéfinie limite de préévaluation hélicoïdalement réduite quelconque dans Z^2 , ce qui entraîne, pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $0 = 1_1 \leq n(j, 1) = n(j+1) - n(j) \leq 1_1 + 1 = 1$

[sans que la différence $n(j+1)-n(j)$ soit toujours égale à 1, car alors, l_1 serait égale à 1] et soit T une translation quelconque de Z^{s-1} . Si $\bar{E}$ est une hypersurface indéfinie limite de préévaluation dans Z^{s-1} telle que $\mathcal{C}_{\bar{E}} = Z^{s-1}/\mathfrak{N}_{\bar{E}}$ possède un plus petit élément positif $\bar{\tau}_0 = \bar{T}_0 + \mathfrak{N}_{\bar{E}}$, on considère l'hypersurface indéfinie limite $E \subseteq Z^s$ telle que

$$E_j^{s-1} = [j\bar{T} - n(j)\bar{T}_0].\bar{E} = [j(\bar{T} + \bar{T}_0) - i(j)\bar{T}_0].\bar{E}.$$

Alors, pour cette hypersurface, on a

$$\bar{\tau}(1) = \bar{\tau} + \max_{j \in \mathbb{Z}} [n(j)-n(j+1)]\bar{\tau}_0 = \bar{\tau} + 0 \cdot \bar{\tau}_0 = \bar{\tau} \text{ et } \bar{T}(1) \equiv \bar{T} \pmod{\mathfrak{N}_{\bar{E}}}.$$

Cela montre que, pour cette hypersurface considérée, on a

$$n(j) = \sum_{q=0}^{j-1} s(q,1), \text{ où les } s(q,1) \text{ sont, à leur tour, définis par la formule}$$

$$s(j,h) = \max_{q \in \mathbb{Z}} [n(q)-n(q+h)] - [n(j)-n(j+h)].$$

Ainsi, on a $s(j,h) \geq 0$ et si j est une valeur telle que

$$\max_{q \in \mathbb{Z}} [n(q)-n(q+1)] \text{ soit atteint, on a } s(j,h) = 0. \text{ Donc la fonction } s(j,h)$$

obtenue à partir de $n(j) = i(j)-j$ satisfait bien aux conditions requises pour que la condition " $(\forall j, j' \in \mathbb{Z}) [|N(j, j', h)| \leq 1]$ " soit équivalente à la condition " $(\forall j \in \mathbb{Z}) [s(j, h) \leq 1]$ ", où $N(j, j', h) = [n(j)-n(j+h)] - [n(j')-n(j'+h)]$. Or puisque $S(\theta)$ est de préévaluation, la première des deux conditions précédentes est satisfaite, il en est donc de même de la seconde et E est de préévaluation. Ainsi, finalement, on a démontré le résultat suivant.

Théorème. Soit $\bar{E} \subseteq Z^{s-1}$ une hypersurface indéfinie limite de préévaluation telle que $\mathcal{C}_{\bar{E}} = Z^{s-1}/\mathfrak{N}_{\bar{E}}$ possède le plus petit élément positif $\bar{\tau}_0 = \bar{T}_0 + \mathfrak{N}_{\bar{E}}$.

Alors les hypersurfaces indéfinies limites de préévaluation $E \subseteq Z^s$ dont toutes les j -sections proximales E_j^{s-1} sont de la forme $\bar{E}$ (il suffit, pour cela, que

E_0^{s-1} soit de cette forme quand on sait que toute hypersurface indéfinie limite de préévaluation dans Z^{s-1} , dont aucune translatée entière ne traverse $\bar{E}$, est une translatée entière de $\bar{E}$) sont, à une translation près, les hypersurfaces (et ce sont les seules) telles que

$$E_j^{s-1} = [j\bar{T} - n(j)\bar{T}_0].E_0^{s-1}$$

où $\bar{T}$ est une translation quelconque de Z^{s-1} telle que $\bar{\tau} = \bar{T} + \frac{n}{E} \leq -e_q + \frac{n}{E}$, pour tout $q = 1, 2, \dots, s-1$, tandis que $n(j) = i(j) - j$, où $i(j)$ est la deuxième fonction caractéristique d'une courbe indéfinie limite de préévaluation dans Z^2 formée des points entiers d'une courbe de préévaluation hélicoïdalement réduite $S = S[\theta = (\Lambda, \xi)]$ de R^2 [$\Lambda = (1_1 = 0, 1_2, \dots, 1_{\sigma-1})$].

L'hypersurface définie par le théorème est notée $H(E, T, \theta)$.

Remarque 2. (a) Si $\bar{E}$ est périodique (auquel cas toutes les E_j^{s-1} sont sûrement de la forme $\bar{E}$) $\bar{\tau} = \bar{T} + \frac{n}{E}$ est un multiple $l\bar{\tau}_0$ de $\bar{\tau}_0$, il est clair que l'on peut écrire, dans ce cas, $E_j^{s-1} = [jl + n(j)]\bar{T}_0.\bar{E} = n'(j)\bar{T}_0.\bar{E}$, où $n'(j) = i'(j) - j$ provient de la courbe $S' = S[\theta' = (\Lambda', \xi)]$, avec $\Lambda' = (1, 1_2, \dots, 1_{\sigma-1})$. Dans ce cas, on écrira $H(\bar{E}, \theta')$ au lieu de $H(\bar{E}, \bar{T}, \theta')$.

(b) E est périodique si, et seulement si $\bar{E}$ et S' sont toutes les deux périodiques. Si $S' = S[\theta' = (\Lambda', 0)]$, où $\Lambda' = (1, 1_2, \dots, 1_{\sigma-1})$, E peut alors se caractériser en donnant la caractérisation de $\bar{E}$ ainsi que la suite Λ' . Le plus petit élément de $\mathcal{C}_E$ est alors engendré par la translation

$$T_0 \equiv a_{\sigma-2}(\Lambda')\bar{T}_0 + b_{\sigma-2}(\Lambda')e_s \quad (\text{mod. } \mathfrak{N}_E),$$

quant à $\mathfrak{N}_E$, il est engendré par $\frac{n}{E}$ et par $\pi_s = a_{\sigma-1}(\Lambda')\bar{T}_0 + b_{\sigma-1}(\Lambda')e_s$.

La remarque précédente permet d'énoncer le résultat suivant.

Corollaire 1. Soit $E \subseteq Z^s$ une hypersurface indéfinie limite de préévaluation périodique. Alors E est déterminée par ses périodes et par le groupe $\mathcal{C}_E$.

En effet, supposons que le corollaire 1 soit vrai pour les hypersurfaces indéfinies limites de préévaluation dans Z^{s-1} . Alors $\bar{E}$ est déterminée par ses périodes et par l'ordre des classes de translations dans $\mathcal{C}_{\bar{E}}$, qui ne sont autre chose que des classes de translations dans $\mathcal{C}_E$, si on se borne aux translations parallèles à Z^{s-1} . Cela permet de déterminer $\bar{\tau}_0 = \bar{T}_0 + \bar{\eta}_E$. Dès lors, la connaissance de la période supplémentaire π_s , telle que $Z\pi_s + \frac{\eta}{E} = \eta_E$, donne $a_{\sigma-1}(\Lambda')$ et $b_{\sigma-1}(\Lambda')$, et la connaissance de $\bar{\tau}_0 = T_0 + \eta_E$ donne $a_{\sigma-2}(\Lambda')$ et $b_{\sigma-2}(\Lambda')$, c'est plus qu'il ne faut pour déterminer Λ' .

Corollaire 2. Si l'hypothèse (B) est vraie pour $s-1$, elle est vraie pour s .

En effet, soient E et E' deux hypersurfaces indéfinies limites de préévaluation périodiques dans Z^s dont les translatées entières ne se traversent pas. Alors $\eta_E = \eta_{E'}$.

Si l'on effectue la récurrence sur s , dont le chapitre précédent fournit le pas et le corollaire 1 le départ, on aboutit au résultat suivant.

Corollaire 3. Toutes les hypersurfaces indéfinies limites de préévaluation et périodiques dans Z^s se décrivent par la donnée de $s-1$ systèmes d'invariants

$$\begin{aligned} \Lambda' &= (l_1', \dots, l_q', \dots; q < \sigma' < +\infty), \Lambda'' = (l_1'', \dots, l_q'', \dots; q < \sigma'' < +\infty), \dots, \Lambda^{(s-1)} = \\ &= (l_1^{(s-1)}, \dots, l_q^{(s-1)}, \dots; q < \sigma^{(s-1)} < +\infty). \end{aligned}$$

En effet, on construit en employant successivement les différents systèmes d'invariants, des hypersurfaces $E^{(t)} \subseteq Z^t$ ($2 \leq t \leq s$). D'abord

$$E^{(2)} = S[\theta' = (\Lambda', 0)] \cap Z^2.$$

Ensuite, $E^{(t-1)}$ étant déjà construite et étant de préévaluation, soit

$$\tau_0^{(t-1)} = T_0^{(t-1)} + \eta_{E^{(t-1)}} \text{ le plus petit élément strictement positif de}$$

$\mathcal{C}_{E^{(t-1)}}$. Pour que la construction puisse être continuée, il est nécessaire

et suffisant que $l_1^{(t-1)} \tau_0^{(t-1)} \geq e_{t-1} + \eta_{E^{(t-1)}}$ (théorème précédent et

remarque 2). Cette dernière condition étant satisfaite, on pose

$$E^{(t)} = H[E^{(t-1)}, \theta^{(t-1)} = (\Lambda^{(t-1)}, 0)].$$

Enfin on pose $E = E(\Lambda', \Lambda'', \dots, \Lambda^{(s-1)}) = E^{(s)}$.

Les conditions $l_1^{(t-1)} \tau_0^{(t-1)} \geq c_{t-1} + \eta_E^{(t-1)}$ sont les seules auxquelles les $\Lambda^{(t)}$ ($2 \leq t \leq s-1$) doivent satisfaire. A part ces conditions, on peut choisir les $\Lambda^{(t)}$ de façon arbitraire.

Remarque 3. Il résulte du corollaire 3 que E peut aussi se caractériser par une suite $\alpha', \alpha'', \dots, \alpha^{(s-1)}$ de nombres rationnels $\alpha^{(t)} \in [-1, 0[$, où $\alpha^{(t)} = \alpha(\Lambda^{(t)})$ ($1 \leq t < s$) ; les nombres $\alpha(\Lambda^{(t)})$ satisfaisant aux inégalités déterminées (compte tenu de ce qui précède) par les $\alpha(\Lambda^{(q)})$ avec $q < t$ [(6.3.1) remarques 2 et 3].

Chapitre IX

PREVALUATIONS ET ORDRES SEPARATEURS DES ANNEAUX NILMONIQUES PREVALUABLES

(9.1) Soient $A = A'[\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s]$ un anneau nilmonique [(3.1.13)],

$M = M(X_1, X_2, \dots, X_s)$ le semi-groupe multiplicatif des monômes unitaires

$m(X) = X^i$ en $X = (X_1, X_2, \dots, X_s)$, où $i = (i_1, i_2, \dots, i_s) \in \mathbb{N}^s$, et

$M' = M'(\xi) = \{m(\xi) = \xi^i ; m(X) \in M\}$, où $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s)$ est une base de nilmonicité de A .

Définition 1. On appelle préévaluation de A une application $p : M' \rightarrow D$, où D est un demi-groupe multiplicatif totalement ordonné avec 0 (zéro), telle que

$$1^\circ p(m(\xi)) = 0 \Leftrightarrow m(\xi) = 0$$

$$2^\circ p(m_1(\xi)m_2(\xi)) = p(m_1(\xi))p(m_2(\xi))$$

quels que soient $m(\xi)$, $m_1(\xi)$, $m_2(\xi) \in M'$.

Soit $a \in A$, on pose

$$N_{(m)}(a) = N(a) \cap M'.$$

Définition 2. On dit que l'anneau nilmonique A est prévaluable si l'ensemble $\{N_{(m)}(a) ; a \in A\}$ est totalement ordonné par inclusion.

Théorème. Pour qu'il existe une préévaluation de A , il faut et il suffit que A soit prévaluable. En outre, si A est prévaluable, il existe parmi les préévaluations de A , une plus grossière p_0 (telle que, pour toute préévaluation p de A on ait $p(a) = p(b) \Rightarrow p_0(a) = p_0(b)$ quels que soient a et $b \in M'$) dite sa préévaluation minimale.

Si l'on tient compte de la définition des anneaux prévaluables et de l'égalité $\{N(a) ; a \in M'\} = \{N_{(m)}(a) ; a \in M'\}$ [définition 2 et (A) démonstration de la proposition (3.1.12)], la démonstration du théorème précédent est analogue à celle du théorème de valuabilité [théorème (1.3.1)].

Soit $\theta : X_1^{i_1} X_2^{i_2} \dots X_s^{i_s} \longrightarrow i = (i_1, i_2, \dots, i_s)$ la bijection canonique de $M(X)$ sur N^S . Alors si $V = \{\theta(X^i) ; \xi^i \neq 0\}$ et $W = \{\theta(X^i) ; \xi^i = 0\}$, (V, W) est une partition canonique de N^S . Si E désigne l'ensemble des points limites de la partition (V, W) , on a $V = \text{int } E$ et $W = \text{ext } E$.

Il est clair que A est valuable si et seulement si E est de type ML de préévaluation ou, ce qui est équivalent, (V, W) est une partition de préévaluation dans N^S , autrement dit les translatées entières de E ne se traversent pas [(4.1.15)].

(1) Soit $a = \xi^i \in M'(\xi)$. Alors $b = \xi^j \in N_{(m)}(a)$ si, et seulement si $i + j \in \text{ext } E$, autrement dit $j = \theta(X^j)$ appartient à $\text{ext}[N^S \cap (-i + E)]$ (on admettra que $\text{ext } \emptyset = \text{ext } \{0\} = N^S)$.

Par suite, si $a = \xi^i \in M'(\xi)$ et $a' = \xi^{i'} \in M'(\xi)$, on a $N_{(m)}(a) \supseteq N_{(m)}(a') \Leftrightarrow p_o(a) \leq p_o(a')$ (l'inclusion et l'inégalité étant strictes en même temps) si et seulement si $\text{ext}[N^S \cap (-i + E)] \supseteq \text{ext}[N^S \cap (-i' + E)]$.

(9.2) On conserve les données et les notations de (9.1). Soit R le groupe additif des nombres réels.

Définition. Si l'anneau nilmonique A est prévaluable, une application $\omega : M \rightarrow R$ est dite ordre séparateur de A , si

$$1^\circ \omega(X^i X^j) = \omega(X^i) \omega(X^j)$$

$$2^\circ p_o(\xi^i) > p_o(\xi^j) \Rightarrow \omega(X^i) < \omega(X^j),$$

[ce qui entraîne, en particulier, $\omega(X^i) = \omega(X^j) \Rightarrow p_o(\xi^i) = p_o(\xi^j)$], quels que soient $X^i, X^j \in M$.

D'après 1° , on a

$$(1) \quad \omega(1) = 0.$$

On peut supposer $p_o(1) > p_o(X_1) \geq \dots \geq p_o(X_s)$, donc

$$0 < \omega(X_1) \leq \omega(X_2) \leq \dots \leq \omega(X_s) \quad (\text{condition } 2^\circ).$$

Si $i = (i_1, i_2, \dots, i_s)$, on a $\omega(X^i) = i_1 \omega(X_1) + \dots + i_s \omega(X_s)$.

Comme l'ensemble M est fini, le demi-groupe D_0 des valeurs prises par p_0 est fini. Soit

$$1_{D_0} = p_0(1) = v_0 > v_1 > \dots > v_l = 0_{D_0} = p_0(0)$$

la suite décroissante des éléments de D_0 .

(2) Si q est un entier tel que $q < l$, il n'y a qu'un nombre fini de $X^i \in M$ tels que $p_0(\xi^i) \geq v_q$.

En effet, si n_i est le degré de nilpotence de ξ_i , on a $\xi_i^{n_i} = 0$.

Donc $\xi^i = \xi_1^{i_1} \dots \xi_s^{i_s} \neq 0$ implique simultanément $i_1 < n_1$, $i_2 < n_2$, ..., $i_s < n_s$.

Par suite

$$(3) \quad \omega_q = \max_{p_0(\xi^i) \geq v_q} (\omega(X^i))$$

est un nombre réel fini (on convient de poser $\omega_l = +\infty$ et $\omega_{-1} = -\infty$).

Dès lors, si $\omega_{q-1} < \omega(X^i) < \omega_q$ ($q = 0, 1, \dots, l$), on aura $p_0(\xi^i) \geq v_q$ et $p_0(\xi^i) < v_{q-1}$ si $q > 0$, donc $p_0(\xi^i) = v_q$. En particulier on aura $\xi^i = 0$ si et seulement si $\omega_l \leq \omega(X^i)$.

Théorème 1. Un anneau nilmonique prévaluable A possède des ordres séparateurs si et seulement si l'ensemble de type ML qui lui est associé est indéfiniment prolongeable.

Supposons que A possède un ordre séparateur $\omega : M \rightarrow R$. On pose

$$\alpha_q = - \frac{\omega(X_q)}{\omega(X_s)}.$$

On a $-1 \leq \alpha_q < 0$. D'après (9.1), $i = (i_1, \dots, i_s) \in V = \text{int } E$ si et seulement si $\xi^i \neq 0$, ce qui équivaut à $\omega(X^i) = i_1 \omega(X_1) + \dots + i_s \omega(X_s) \leq \omega_{l-1} < +\infty$. De sorte

que, si $\frac{\omega_{l-1}}{\omega(X_s)} < h < \frac{\omega_l}{\omega(X_s)}$, $i \in V$ équivaut à

$$i_s < \alpha_1 i_1 + \dots + \alpha_{s-1} i_{s-1} + h,$$

ce qui implique $\text{Ep}(E) < 1$ [proposition (5.4.2)], donc E est indéfiniment prolongeable [(5.1.5) définition 2 ; (7.2.2), remarque 2 (a)].

Inversement, si E est indéfiniment prolongeable, donc $\text{Ep}(E) < 1$. En vertu de (5.4.2) rappelé plus haut, il existe un hyperplan

$$(\Pi) : i_s = \alpha_1 i_1 + \dots + \alpha_{s-1} i_{s-1} + h$$

où $-1 \leq \alpha_q < 0$ pour tout $q = 1, 2, \dots, s-1$, tel que le point $(i_1, \dots, i_s) \in \text{int.} E$ si et seulement s'il est au-dessous de Π ou sur Π . Posons $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1})$.

Alors, $\text{ext.} E$ est l'ensemble des points $i = (i_1, \dots, i_s) \in \mathbb{N}^s$ tels que

$$h_\alpha(i) = i_s - \alpha_1 i_1 - \dots - \alpha_{s-1} i_{s-1} > h. \text{ Par suite, si } i = (i_1, \dots, i_s) \text{ et}$$

$j = (j_1, \dots, j_s)$ sont deux points de $\mathbb{N}^s$, on a $i + j \in \text{ext.} E$ si, et seulement si

$$h_\alpha(i+j) = h_\alpha(i) + h_\alpha(j) > h, \text{ ce qui équivaut à } h_\alpha(j) > h - h_\alpha(i). \text{ Posons}$$

$$\omega(X^i) = h_\alpha(i) = -\alpha_1 i_1 - \dots - \alpha_{s-1} i_{s-1} + i_s. \text{ Il est clair que}$$

$$\omega(X^i X^j) = \omega(X^i) + \omega(X^j) \text{ quels que soient } X^i, X^j \in M. \text{ D'autre part, si}$$

$$i, i' \in \mathbb{N}^s \text{ sont tels que } \omega(X^i) \geq \omega(X^{i'}), \text{ donc } h_\alpha(i) \geq h_\alpha(i'), \text{ et si } a = \xi^i,$$

$$a' = \xi^{i'}, \text{ on a } b = \xi^j \in N_m(a) \text{ [resp. } N_{(m)}(a')] \text{ si } i + j \text{ [resp. } i' + j]$$

appartient à $\text{ext.} E$, autrement dit $h_\alpha(j) \geq h - h_\alpha(i)$ [resp. $h - h_\alpha(i')$]. Comme

$$h_\alpha(i) \geq h_\alpha(i'), \text{ on aura } b \in N_{(m)}(a') \Rightarrow b \in N_{(m)}(a), \text{ donc } p_o(a) \leq p_o(a'), \text{ ce}$$

qui entraîne directement que ω est un ordre séparateur de A .

Théorème 2. Pour qu'un anneau nilmonique prévaluable A soit valuable, il suffit qu'il existe un ordre séparateur de A .

Lemme. On suppose que ω est un ordre séparateur de A .

$$\text{Soient } f(X) = \sum \lambda_i m_i(X) \text{ et } g(X) = \sum \mu_j n_j(X) \text{ } [\lambda_i, \mu_j \in A' ; m_i(X), n_j(X) \in M(X)]$$

des polynômes de $A'[X]$. On a $f(\xi)g(\xi) = 0 \Leftrightarrow$ quels que soient les indices i et j

tels que $\lambda_i \neq 0$ et $\mu_j \neq 0$, on a $m_i(\xi)n_j(\xi) = 0$.

L'implication dans le sens $\Leftarrow$ est évidente.

Démontrons l'implication dans l'autre sens. Soit $m_{i_0}(X)$ [resp. $n_{j_0}(X)$] le monôme de $f(X)$ [resp. $g(X)$] tel que pour tout monôme $m_i(X)$ [resp. $n_j(X)$] de $f(X)$ [resp. $g(X)$] on ait, ou bien $\omega(m_{i_0}(X)) < \omega(m_i(X))$ [resp. $\omega(n_{j_0}(X)) < \omega(n_j(X))$] ou bien $\omega(m_{i_0}(X)) = \omega(m_i(X))$ et $m_{i_0} \leq m_i(X)$ [resp. $\omega(n_{j_0}(X)) = \omega(n_j(X))$ et $n_{j_0}(X) \leq n_j(X)$]. Dans le produit $f(X)g(X)$, le monôme $m_{i_0}(X)n_{j_0}(X)$ ne peut se réduire avec aucun autre monôme $m_i(X)n_j(X)$. En effet, pour un autre monôme $m_i(X)n_j(X)$ du produit $f(X)g(X)$ avec $i \neq i_0$ ou $j \neq j_0$, on aura ou bien $\omega(m_i(X)n_j(X)) < \omega(m_{i_0}(X)n_{j_0}(X))$, ou bien $\omega(m_i(X)n_j(X)) = \omega(m_{i_0}(X)n_{j_0}(X))$ et $m_{i_0}(X)n_{j_0}(X) \leq m_i(X)n_j(X)$. Donc si $f(\xi)g(\xi) = 0$, on a nécessairement $m_{i_0}(\xi)n_{j_0}(\xi) = 0$. Mais alors, pour tout i, j tels que $\lambda_i \neq 0, \mu_j \neq 0$, on aura $m_i(\xi)n_j(\xi) = 0$, car on a $\omega(m_{i_0}(X)n_{j_0}(X)) \leq \omega(m_j(X)n_j(X))$ donc $p_0(m_{i_0}(\xi)n_{j_0}(\xi)) \geq p_0(m_j(\xi)n_j(\xi)) \Leftrightarrow N(m_{i_0}(\xi)n_{j_0}(\xi)) \leq N(m_j(\xi)n_j(\xi))$. Le lemme résulte directement de ce qui précède.

Revenons à la démonstration du théorème.

Supposons que l'anneau prévaluable A ne soit pas valable. Alors il existe des polynômes $f_1(X), f_2(X), g_1(X)$ et $g_2(X) \in A'[X]$ tels que $f_1(\xi)g_1(\xi) = 0$, $f_1(\xi)g_2(\xi) \neq 0$, $f_2(\xi)g_2(\xi) = 0$, $f_2(\xi)g_1(\xi) \neq 0$. Le lemme précédent prouve qu'il existe aussi des monômes $m_1(X), m_2(X), n_1(X), n_2(X)$ termes de $f_1(X), f_2(X), g_1(X)$ et $g_2(X)$ respectivement tels que $m_1(\xi)n_1(\xi) = 0$, $m_1(\xi)n_2(\xi) \neq 0$, $m_2(\xi)n_2(\xi) = 0$ et $m_2(\xi)n_1(\xi) \neq 0$, ce qui contredit le fait que A est prévaluable.

Corollaire. Pour qu'un anneau nilmonique prévaluable soit valable, il suffit que le sous-ensemble de type ML de préévaluation qui lui est associé soit indéfiniment prolongeable.

Il suffit d'appliquer les théorèmes 1 et 2 précédents.

(9.3) Un contre-exemple.

On se propose de montrer que si $s > 2$ (en particulier si $s = 3$), il existe des sous-ensembles de type ML dans N^s qui sont de préévaluation, mais ne sont pas indéfiniment prolongeables [dans N^2 tout sous-ensemble de type ML de préévaluation est indéfiniment prolongeable [(5.4.5) et (7.2.2) remarque 2, (a)]] Pour cela on va construire un tel ensemble dont l'épaisseur est exactement égal à 1 [en effet, l'épaisseur d'un ensemble de type ML de préévaluation indéfiniment prolongeable est < 1 [(5.7.6) proposition]. L'existence de sous-ensembles de type ML de préévaluation d'épaisseur > 1 reste une question ouverte.

Soient $V_1 = (v_{1,1}, v_{1,2}, \dots, v_{1,s}), \dots, V_{s-1} = (v_{s-1,1}, \dots, v_{s-1,s})$ $s-1$ vecteurs de Z^s . On pose :

$$\Delta = \{ \lambda_1 V_1 + \dots + \lambda_{s-1} V_{s-1} ; 0 \leq \lambda_1, \dots, \lambda_{s-1} ; \lambda_1 + \dots + \lambda_{s-1} \leq 1 \}.$$

Il est clair que si un point $P \in Z^s$ est de la forme $P = \lambda_1 V_1 + \dots + \lambda_{s-1} V_{s-1}$, les $\lambda_1, \dots, \lambda_{s-1}$ sont nécessairement rationnels. Si n est le plus petit dénominateur commun des λ_i ($i = 1, 2, \dots, s-1$), on dira que P est un n -point de Z^s . Autrement dit, si $\lambda_i = \frac{l_i}{n}$ [ce qui équivaut à $nP = l_1 V_1 + \dots + l_{s-1} V_{s-1}$], P est un n -point si et seulement si $l_1, \dots, l_{s-1}$ sont des entiers tels que leur p.g.c.d. soit premier à n . Par suite, l'existence de n -point de Z^s équivaut à la résolubilité des congruences

$$(1) \quad \sum_{i=1}^{s-1} l_i v_{i,j} \equiv 0 \pmod{n} \quad (j = 1, 2, \dots, s)$$

avec des $l_1, l_2, \dots, l_{s-1}$ dont le p.g.c.d. est premier à n . Il est clair que cela équivaut à la résolubilité de ces congruences modulo tout facteur primaire p^m de n en des l_i dont au moins un est premier à p .

Supposons donc que $(l_1, l_2, \dots, l_{s-1})$ soit une solution du système (1) avec $n = p^m$ telle que $l_i \not\equiv 0(p)$. Alors si D est le déterminant d'une sous-matrice carrée quelconque d'ordre $s-1$ extraite de la matrice $(v_{i,j})$ ($i = 1, 2, \dots, s-1$; $j = 1, 2, \dots, s$), on obtient, à partir de ces congruences, par le procédé habituel, la congruence $Dl_i \equiv 0 \pmod{p^m}$, qui a une solution si et seulement si $D \equiv 0 \pmod{p^m}$. Ainsi, on a le résultat suivant.

Théorème.⁽¹⁾ Il existe des n -points de Z^s si, et seulement si toutes les matrices carrées d'ordre $s-1$ de la matrice $(v_{i,j})$ ont leur déterminant divisible par n .

Considérons le cas $s = 3$.

Lemme 1. Il existe deux points $V_1 = (v_{1,1}, v_{1,2}, v_{1,3})$ et $V_2 = (v_{2,1}, v_{2,2}, v_{2,3})$ de Z^3 tels que

1° $\frac{V_1 + V_2}{3}$ est un point entier de Δ , tandis que $\frac{V_1}{3}$ et $\frac{V_2}{3}$ ne le sont pas,

2° si $3 \not\equiv 0 \pmod{n}$, il n'existe aucun n -point entier dans Δ ,

3° $v_{1,1}, -v_{1,3}, v_{2,2}, -v_{2,3}$ sont positifs ; $v_{1,2}$ et $v_{2,1}$ ne sont pas nuls,

4° ε étant un nombre réel strictement positif donné d'avance,

$$\left| \frac{v_{1,3}}{v_{2,3}} - 1 \right|, \quad \left| \frac{v_{1,2}}{v_{1,1}} \right|, \quad \left| \frac{v_{2,1}}{v_{2,2}} \right| \quad \text{et} \quad \left| \frac{v_{1,2}}{v_{2,2}} \right| \quad \text{sont} < \varepsilon,$$

5° $v_{1,1} > 2 v_{2,2}$, $v_{2,2} > -2 v_{1,3}$.

(1) Il est probable que ce théorème soit connu, depuis longtemps, des spécialistes de la géométrie des nombres et de la théorie des réseaux. Comme il ne joue ici qu'un rôle auxiliaire, nous n'avons pas cru utile de chercher à qui il doit être attribué.

Fixons $\varepsilon > 0$. La condition 1° est satisfaite dès que l'on impose aux $v_{i,j}$ ($i = 1, 2$; $j = 1, 2, 3$) les conditions suivantes

$$(A) \quad v_{1,j} + v_{2,j} \equiv 0 \pmod{3}$$

sans que tous les $v_{1,j}$ ou tous les $v_{2,j}$ soient $\equiv 0 \pmod{3}$. En particulier, on peut supposer

$$(B) \quad v_{1,3} \equiv 1 \pmod{3} \text{ et } v_{2,3} = v_{1,3} + 1 \equiv 2 \pmod{3}$$

[les conditions (B) sont compatibles avec les conditions (A), car

$v_{1,3} + v_{2,3}$ est alors $\equiv 0 \pmod{3}$]. Si, de plus, on suppose $-v_{2,3} > \frac{1}{\varepsilon}$,

$$\text{on aura } \left| \frac{v_{1,3}}{v_{2,3}} - 1 \right| = \left| -\frac{1}{v_{2,3}} \right| < \varepsilon.$$

Considérons les déterminants

$$D_1 = \begin{vmatrix} v_{1,1} & v_{1,3} \\ v_{2,1} & v_{2,3} \end{vmatrix} \quad \text{et} \quad D_2 = \begin{vmatrix} v_{1,2} & v_{1,3} \\ v_{2,2} & v_{2,3} \end{vmatrix}$$

de sous-matrices carrées d'ordre 2 extraites de la (2,3)-matrice $(v_{i,j})$. Comme

$v_{2,3} = v_{1,3} + 1$, on a $D_1 = v_{1,3}(v_{1,1} - v_{2,1}) + v_{1,1}$ et $D_2 = v_{1,3}(v_{1,2} - v_{2,2}) + v_{1,2}$.

Si $v_{1,3}$ (donc $v_{2,3}$) est fixé, D_1 et D_2 sont les valeurs d'une même forme

linéaire $v_{1,3} t_1 + t_2$ (sur $\mathbb{R}^2$) pour les points respectifs $(t_1 = v_{1,1} - v_{2,1}, t_2 = v_{1,1})$,

$(t_1 = v_{1,2} - v_{2,2}, t_2 = v_{1,2})$.

Si les $v_{i,j}$ ($i = 1, 2$; $j = 1, 2, 3$) satisfont aux conditions (A) les déterminants D_1 et D_2 sont divisibles par 3 ; (cela résulte, d'ailleurs, du théorème précédent).

La condition 2° est sûrement satisfaite toujours en vertu du même théorème, si les $v_{i,j}$ ($i, j = 1, 2$) sont tels que le p.g.c.d. de D_1 et D_2 soit précisément 3.

Comme on cherche à prouver l'existence des points V_1, V_2 satisfaisant aux conditions 1°, 2°, 3°, 4° et 5° du lemme, on peut imposer aux $v_{i,j}$ ($i = 1, 2 ; j = 1, 2, 3$) des conditions plus strictes que (A) (on l'a déjà fait pour les $v_{i,3}$), par exemple, pour $j = 1, 2, 3$ (pour $j = 3$, elles sont déjà imposées).

$$(C) \quad v_{1,j} \equiv 1, \quad v_{2,j} \equiv -1 \pmod{3}.$$

On peut donc poser

$$(D) \quad v_{1,j} = 3 w_{1,j} + 1, \quad v_{2,j} = 3 w_{2,j} - 1 \quad (j = 1, 2),$$

donc $v_{1,j} - v_{2,j} = 3(w_{1,j} - w_{2,j}) + 2$. Ainsi D_1 et D_2 deviennent les valeurs de la forme linéaire $3 v_{1,3} T_1 + 3 T_2 = 3(v_{1,3} T_1 + T_2)$ pour les systèmes respectifs de points ($T'_1 = w_{1,1} - w_{2,1}, T'_2 = w_{1,1} + \theta$),

$$(T''_1 = w_{1,2} - w_{2,2}, T''_2 = w_{1,2} + \theta), \quad \text{où } \theta = \frac{2 v_{1,3} + 1}{3} \in \mathbb{Z}.$$

La condition 1° est automatiquement satisfaite quelles que soient ces valeurs $\in \mathbb{Z}$ et la condition 2° l'est si $\frac{D_1}{3} = v_{1,3} T'_1 + T'_2$ et $\frac{D_2}{3} = v_{2,3} T''_1 + T''_2$ sont premiers entre eux.

Il est à remarquer que l'application $(w_1, w_2) \mapsto (T_1 = w_1 - w_2, T_2 = w_1 + \theta)$, où θ est une constante dans $\mathbb{Z}$, est une application linéaire (non-homogène) non-singulière de $\mathbb{R}^2$ de déterminant $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1$, qui applique $\mathbb{Z}^2$ dans lui-même, donc une bijection de $\mathbb{Z}^2$. Par conséquent, un choix arbitraire de (T'_1, T'_2) [resp. (T''_1, T''_2)] détermine toujours un choix correspondant de $(w_{1,1}, w_{2,1})$ [resp. $(w_{1,2}, w_{2,2})$]. On va montrer que l'on peut faire un tel choix rendant $v_{1,3} T'_1 + T'_2$ et $v_{1,3} T''_1 + T''_2$ premiers entre eux et respectant, en plus, les inégalités imposées qui ne sont pas déjà vérifiées.

D'après les choix déjà effectués, on a

$v_{1,3} < 0$, $v_{2,3} < 0$ et $\left| \frac{v_{1,3}}{v_{2,3}} - 1 \right| < \varepsilon$. Il reste encore à assurer

que $v_{1,1} > 0$, $v_{2,2} > 0$, $\left| \frac{v_{1,2}}{v_{1,1}} \right| < \varepsilon$, $\left| \frac{v_{2,1}}{v_{2,2}} \right| < \varepsilon$, $\left| \frac{v_{1,2}}{v_{2,2}} \right| < \varepsilon$, $v_{1,1} > 2 v_{2,2}$,
 $v_{2,2} > -2 v_{1,3}$.

Remarquons que $w_{1,1} > 0 \Rightarrow v_{1,1} > 0$, $w_{2,2} > 0 \Rightarrow v_{2,2} > 0$,

$\left| \frac{v_{1,2}}{v_{1,1}} \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| v_{1,1} \right| > \frac{1}{\varepsilon}$ et $\left| \frac{v_{2,1}}{v_{2,2}} \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| v_{2,2} \right| > \frac{1}{\varepsilon}$, auquel cas

$\left| \frac{v_{1,2}}{v_{1,1}} \right| = \left| \frac{3 w_{1,2} + 1}{3 w_{1,1} + 1} \right|$ ne diffère de $\left| \frac{w_{1,2}}{w_{1,1}} \right|$ que d'un infiniment petit d'ordre 2

en ε . Il est donc clair, par exemple, que si ε est assez petit,

$\left| \frac{w_{1,2}}{w_{1,1}} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \left| \frac{v_{1,2}}{v_{1,1}} \right| < \varepsilon$ et de même $\left| \frac{w_{2,1}}{w_{2,2}} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow \left| \frac{v_{2,1}}{v_{2,2}} \right| < \varepsilon$. D'autre part,

$w_{2,2} > -v_{1,3} \Rightarrow v_{2,2} > 2 v_{1,3}$ et $w_{1,1} > 2 w_{2,2} \Rightarrow v_{1,1} > 2 v_{2,2}$. Il suffit donc,

pour assurer de tels choix de (T'_1, T'_2) , (T''_1, T''_2) , que soient satisfaites les conditions suivantes

$$(E) \quad w_{1,1} > 0, w_{2,2} > 0, \left| \frac{w_{1,2}}{w_{1,1}} \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \left| \frac{w_{2,1}}{w_{2,2}} \right| < \frac{\varepsilon}{2}, \left| \frac{w_{1,2}}{w_{2,2}} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$w_{2,2} > -v_{1,3}, \quad w_{1,1} > 2 w_{2,2}.$$

On a $w_{1,1} = T'_2 - \theta$, $w_{1,2} = T''_2 - \theta$, $w_{2,1} = w_{1,1} - T'_1 = T'_2 - T'_1 - \theta$,

$$w_{2,2} = w_{1,1} - T''_1 = T''_2 - T''_1 - \theta$$

Posons d'abord $T''_2 = \theta + 1$, ce qui implique $w_{1,2} = 1$. Ensuite, choisissons T''_1 de manière que

$$(F) \quad -T''_1 > -T''_2 - 2\theta + \frac{2}{\varepsilon} - 3\theta - 1,$$

ce qui implique déjà $w_{2,2} > \frac{2}{\varepsilon} - 3\theta = \frac{2}{\varepsilon} - 2v_{1,3} - 1$, donc $w_{2,2} > \frac{2}{\varepsilon}$ et

$$w_{2,2} > -2v_{1,3}, \text{ donc } \left| \frac{w_{1,2}}{w_{2,2}} \right| < \frac{1}{2\varepsilon^{-1}} = \frac{\varepsilon}{2} \text{ et } \left| \frac{v_{1,2}}{v_{2,2}} \right| \leq \left| \frac{4}{3w_{2,2}^{-1}} \right| < \varepsilon,$$

si ε est assez petit, et

(G) $v_{1,3}T_1'' + T_2''$ soit premier à $v_{1,3} + 1$, ce qui équivaut à ce que $T_2'' - T_1''$ le soit.

Il est clair que ces deux conditions [(F) et (G) plus haut] sont compatibles.

Ensuite, imposons à T_1', T_2'' la condition

$$(H) \quad T_2' = T_1' + \theta + 1,$$

ce qui équivaut à $w_{2,1} = 1$ et implique à la fois $\left| \frac{w_{2,1}}{w_{2,2}} \right| < \frac{1}{2\varepsilon^{-1}} = \frac{\varepsilon}{2}$ et

$$w_{1,1} = T_2' - \theta = T_1' + 1.$$

Enfin, imposons maintenant à T_1' les deux conditions suivantes

$$(I) \quad T_1' > 2\varepsilon^{-1} \text{ et } T_1' > 2(T_2'' - T_1'' - \theta) = 2(-T_1'' + 1),$$

ce qui implique à la fois, si $\varepsilon < \frac{1}{2}$,

$$w_{1,1} > 2w_{2,2} \text{ et } \left| \frac{w_{1,2}}{w_{1,1}} \right| = \left| \frac{1}{T_1' + 1} \right| < \left| \frac{1}{T_1'} \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$(J) \quad D_1' = v_{1,3}T_1' + T_2' = (v_{1,3} + 1)T_1' + (T_2' - T_1') = \\ = (v_{1,3} + 1)T_1' + \theta + 1 \text{ est premier à } D_2' = v_{1,3}T_1'' + T_2''.$$

Comme, d'après (G), D_2' est premier à $v_{1,3} + 1$, il existe, pour tout d , dans l'intervalle $]d, d + D_2'[,$ une valeur T_1' telle que $(v_{1,3} + 1)T_1' + \theta + 1$ soit congrue (mod. D_2') à toute classe de reste donnée d'avance et, en particulier, premier à D_2' . Une telle valeur prise dans l'intervalle particulier

$]2(\varepsilon^{-1} - T_1'' + 1), 2(\varepsilon^{-1} - T_1'' + 1) + D_2']$ satisfait à la fois aux conditions (I), (J), ce qui achève la démonstration du lemme.

Lemme 2. V_1, V_2 étant des points de $Z^3 \subseteq R^3$ satisfaisant aux conditions du lemme 1, soient $L_1 = \dot{O}V_1$, $L_2 = \dot{O}V_2$, $L_3 = V_1V_2$ les segments de R^3 qui limitent le triangle Δ . Si Δ^* est le triangle homothétique de rapport 2 de Δ par rapport à son point entier $\frac{V_1+V_2}{2}$ (qui est limité par les segments $L_1^* = \left(\frac{V_1 - 2V_2}{6}\right) + L_1$, $L_2^* = \left(\frac{V_2 - 2V_1}{6}\right) + L_2$, $L_3^* = \left(\frac{V_1 + V_2}{2}\right) + L_3$).

Alors, l'intérieur de Δ^* contient les mêmes points entiers que le triangle fermé Δ , c'est-à-dire les points $\dot{O}$, V_1 , V_2 et $\frac{V_1 + V_2}{3}$.

Tout point entier du plan contenant Δ est de la forme

$P = \frac{l_1}{3} V_1 + \frac{l_2}{3} V_2$, où $l_1, l_2 \in \mathbb{Z}$. Mais $l_1 V_1 + l_2 V_2 = 3P$, donc P est un point entier si et seulement si toutes les coordonnées $u_j = l_1 v_{1,j} + l_2 v_{2,j}$ ($j = 1, 2, 3$) sont $\equiv 0 \pmod{3}$. Mais l'intégrité de $\frac{V_1+V_2}{3}$ implique, comme on l'a déjà vu, que pour tout j , $v_{1,j+V_2,j} \equiv 0 \pmod{3}$, donc $(l_1 - l_2)v_{1,j} \equiv 0 \pmod{3}$ pour $j = 1, 2, 3$. Comme pas tous les $v_{i,j}$ sont $\equiv 0 \pmod{3}$, P est entier si et seulement si $l_1 \equiv l_2 \pmod{3}$.

Soit $P = \lambda_1 V_1 + \lambda_2 V_2$ un point quelconque et posons

$P = \frac{V_1 + V_2}{3} + \lambda_1' V_1 + \lambda_2' V_2$, donc $\lambda_i = \lambda_i' + \frac{1}{3}$ ($i = 1, 2$). Pour que P soit un point intérieur de Δ^* , il faut et il suffit que

$P^o = \frac{V_1+V_2}{3} + \frac{\lambda_1'}{2} V_1 + \frac{\lambda_2'}{2} V_2$ en soit un de Δ , autrement dit que

$\frac{\lambda_1'}{2} + \frac{1}{3} > 0$, $\frac{\lambda_2'}{2} + \frac{1}{3} > 0$ et $\frac{\lambda_1' + \lambda_2'}{2} + \frac{2}{3} < 1$, autrement dit,

$\lambda_1' > -\frac{2}{3}$, $\lambda_2' > -\frac{2}{3}$, $\lambda_1' + \lambda_2' < \frac{2}{3}$, ce qui équivaut à $\lambda_1 > -\frac{1}{3}$,

$\lambda_2 > -\frac{1}{3}$, $\lambda_1 + \lambda_2 < \frac{4}{3}$. Mais un tel point ne peut être entier que si

λ_1 et λ_2 sont multiples de $\frac{1}{3}$, ce qui implique $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 \leq 1$,

c'est-à-dire $P \in \Delta$.

Posons $\lambda_i = \frac{l_i}{3}$. On a donc $l_1 \geq 0$, $l_2 \geq 0$, $l_1 + l_2 \leq 3$ et P est entier si et seulement si $l_1 \equiv l_2 \pmod{3}$. Les seuls systèmes de valeurs satisfaisant aux inégalités précédentes sont $(0,0)$, $(3,0)$, $(0,3)$, $(1,1)$, auxquels correspondent les points $\hat{O}$, V_1 , V_2 , $\frac{V_1+V_2}{3}$.

Remarque. Soit $x_3 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ l'équation du plan de Δ . Alors si $\varepsilon < \frac{1}{2}$, on a

$$\left| \frac{\alpha_1 v_{1,1}}{v_{1,3}} - 1 \right| < 3\varepsilon, \quad \left| \frac{\alpha_2 v_{2,2}}{v_{2,3}} - 1 \right| < 3\varepsilon \quad [\text{et} \quad \left| \alpha_2 \frac{v_{2,2}}{v_{1,3}} - 1 \right| < 4\varepsilon],$$

$$0 > \alpha_1 > \alpha_2 > -\frac{1}{2} (1 + 4\varepsilon) \quad \text{et} \quad \frac{\alpha_2}{\alpha_1} > 2(1 - 8\varepsilon).$$

En effet, on a $\alpha_1 v_{1,1} + \alpha_2 v_{1,2} = v_{1,3}$ et $\alpha_1 v_{2,1} + \alpha_2 v_{2,2} = v_{2,3}$.

$$\text{Soit } v = \begin{vmatrix} v_{1,1} & v_{1,2} \\ v_{2,1} & v_{2,2} \end{vmatrix}, \text{ donc, puisque } \left| \frac{v_{1,2}}{v_{1,1}} \right| < \varepsilon \text{ et } \left| \frac{v_{2,1}}{v_{2,2}} \right| < \varepsilon, \text{ on a}$$

$$\left| \frac{v}{v_{1,1} v_{2,2}} - 1 \right| < \varepsilon^2. \text{ Posons } v_1 = \begin{vmatrix} v_{1,3} & v_{1,2} \\ v_{2,3} & v_{2,2} \end{vmatrix} = v_{1,3} v_{2,2} - v_{2,3} v_{1,2} \text{ et}$$

$$v_2 = \begin{vmatrix} v_{1,1} & v_{1,3} \\ v_{2,1} & v_{2,3} \end{vmatrix} = v_{1,1} v_{2,3} - v_{2,1} v_{1,3}. \text{ Alors, puisque } \left| \frac{v_{1,3}}{v_{2,3}} - 1 \right| < \varepsilon \text{ et}$$

$$\left| \frac{v_{1,2}}{v_{2,2}} \right| < \varepsilon, \text{ on a } \left| \frac{v_{2,3} v_{1,2}}{v_{1,3} v_{2,2}} \right| < \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} < 2\varepsilon \text{ si } \varepsilon < \frac{1}{2}, \text{ donc } \left| \frac{v_1}{v_{1,3} v_{2,2}} - 1 \right| < 2\varepsilon.$$

$$\text{De même } \left| \frac{v_2}{v_{2,3} v_{1,1}} - 1 \right| < \varepsilon(1+\varepsilon) < 2\varepsilon. \text{ D'autre part, on a}$$

$$\alpha_1 = \frac{v_1}{v} = \left(\frac{v_{1,3} v_{2,2}}{v_{1,1} v_{2,2}} \right) \left(\frac{v_1}{v_{1,3} v_{2,2}} \right) \left(\frac{v}{v_{1,1} v_{2,2}} \right)^{-1}, \text{ donc}$$

le rapport de α_1 à $\frac{v_{1,3}}{v_{1,1}}$ est compris entre $(1+2\varepsilon)(1+\varepsilon^2)$ et $(1-2\varepsilon)(1-\varepsilon^2)$,

autrement dit, $\left| \frac{\alpha_1 v_{1,1}}{v_{1,3}} - 1 \right| < 3\varepsilon$, et de même $\left| \frac{\alpha_2 v_{2,2}}{v_{2,3}} - 1 \right| < 3\varepsilon$ et

$$\left| \frac{\alpha_2 v_{2,2}}{v_{1,3}} - 1 \right| < 4\varepsilon. \text{ Cela montre, en particulier, puisque } \frac{v_{2,2}}{-v_{1,3}} > 2 \text{ et}$$

$$\frac{v_{1,1}}{v_{2,2}} > 2, \text{ que } 0 > \alpha_2 > -\frac{1}{2}(1+4\varepsilon) \text{ et } \frac{\alpha_2}{\alpha_1} > 2(1-3\varepsilon)(1-4\varepsilon) > 2(1-8\varepsilon).$$

En particulier, on a $0 > \alpha_1 > \alpha_2 > -\frac{1}{2}(1+4\varepsilon)$.

Considérons les points $V_1, V_2 \in \mathbb{Z}^3$ satisfaisant, pour ε donné et suffisamment petit, aux conditions du lemme 2 et le triangle Δ correspondant.

Lemme 3. Il existe une translation entière unique T_0 telle que

$$1^\circ \tilde{\Delta} = T_0 \Delta \subseteq \mathbb{R}_+^3,$$

2° Chacun des trois plans de coordonnées ($x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$) contient au moins un des sommets de $\tilde{\Delta}$.

Unicité de T_0 . Supposons qu'il existe deux translations distinctes T_0 et T'_0 de $\mathbb{Z}^3$ telles que $\tilde{\Delta} = T_0 \Delta$ et $\tilde{\Delta}' = T'_0 \Delta$ satisfassent aux conditions du lemme. Il existe donc une translation entière non nulle $\tilde{T} = (\tilde{t}_1, \tilde{t}_2, \tilde{t}_3)$ amenant $\tilde{\Delta}$ sur $\tilde{\Delta}'$. Supposons que l'un des $\tilde{t}_i$ ($i = 1, 2, 3$) soit strictement négatif. Si $\tilde{w}_i$ est un sommet de $\tilde{\Delta}$ se trouvant sur le plan $x_i = 0$, la translatée $\tilde{T} \cdot \tilde{w}_i$ aura sa i -ième coordonnée négative, et on n'aura pas $\tilde{\Delta}' \subseteq \mathbb{R}_+^3$. De même, si l'un des $\tilde{t}_i$ est strictement positif, les i -ièmes coordonnées de tous les sommets de $\tilde{\Delta}'$ seront $\geq \tilde{t}_i > 0$, et aucun sommet de $\tilde{\Delta}'$ ne sera sur le plan $x_i = 0$. On a, par conséquent, $\tilde{T} = (0, 0, 0)$ contrairement à l'hypothèse.

Existence de T_0 . Soit, d'abord, $T_0 = (t_{0,1}, t_{0,2}, t_{0,3})$ une translation entière telle que, pour tout $i = 1, 2, 3$, $t_{0,i} > \max[|v_{1,i}|, |v_{2,i}|]$. Il est clair que $\Delta_0 = T_0 \cdot \Delta$ est contenu dans R_+^3 et que ses sommets sont dans Z^3 . Ensuite effectuons la translation $T_1 = (t_{1,1}, 0, 0)$ telle que le sommet (ou les sommets) de plus petite composante sur X_1 vienne (ou viennent) sur le plan $x_1 = 0$. Comme ce sommet (ou ces sommets) est (ou sont) dans Z^3 , $t_{1,1}$ est nécessairement un entier < 0 . Le triangle $\Delta_1 = T_1 \cdot \Delta_0$ n'a aucun sommet sur $x_2 = 0$ ni sur $x_3 = 0$ et, de plus, reste dans R_+^3 .

Par un raisonnement analogue au précédent, il est clair que l'on peut amener, par deux autres translations $T_2 = (0, t_{2,2}, 0)$, $T_3 = (0, 0, t_{3,3}) \in -N^3$, Δ_0 sur un triangle $\tilde{\Delta}$ vérifiant les conditions du lemme. Il suffit alors de poser $T = T_0 + T_1 + T_2 + T_3$.

Dans ce qui suit, on supposera pour plus de commodité que $v_{1,2} \neq 0$, $v_{2,1} \neq 0$ et $v_{1,3} < v_{2,3}$ (la démonstration du lemme 1 montre que c'est possible).

Lemme 4. On conserve les données et les notations des lemmes précédents. On pose $\tilde{\Delta}^* = T \cdot \Delta^*$ et on note $\hat{\Delta}$ le triangle intersection de R_+^3 avec le plan $\mathcal{P}(\Delta)$ de $\tilde{\Delta}$. Alors si ε est assez petit, $\hat{\Delta}$ est contenu dans l'intérieur de $\tilde{\Delta}^*$.

Soient $\tilde{O}, \tilde{V}_1, \tilde{V}_2, \tilde{u} = \left(\frac{v_1 + v_2}{3} \right) \sim$ les points de $\tilde{\Delta}$ homologues des points $\dot{O}, v_1, v_2, u = \frac{v_1 + v_2}{3}$ de Δ .

Si P désigne l'un des points $\dot{O}, v_1, v_2$, le point $\tilde{P}$ se trouve sur $x_i = 0$ si et seulement si la i -ième coordonnée du point P est égale au minimum des i -ièmes coordonnées des 3 points $\dot{O}, v_1, v_2$.

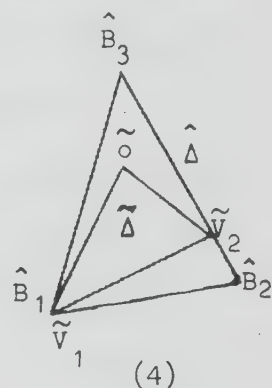
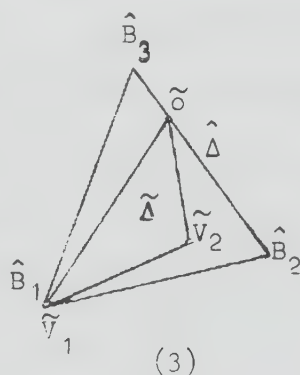
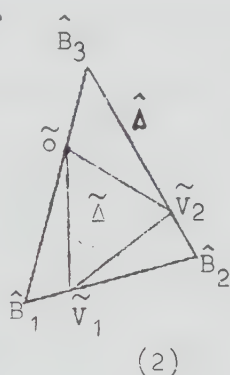
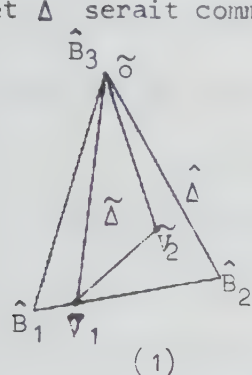
Ainsi, d'abord, seul le point $\tilde{V}_1$ se trouve sur $x_3 = 0$ (on a supposé $v_{1,3} < v_{2,3}$). Ensuite $x_1 = 0$ ne contient qu'un seul des points $\tilde{P}$ et ce point ne peut pas être $\tilde{V}_1$, car les premières coordonnées des points $\dot{O}, v_1, v_2$ sont

respectivement 0, $v_{1,1} > 0$ et $v_{2,1}$. Or, d'après la démonstration du lemme 1,

on a $\left| \frac{v_{2,1}}{v_{1,2}} \right| < \varepsilon$, $\left| \frac{v_{2,2}}{v_{1,1}} \right| < 2(1-8\varepsilon)$, donc $v_{2,1} < v_{1,1}$. Par conséquent, le point $\tilde{P}$ situé sur $x_1 = 0$ est, ou bien $\tilde{O}$, ou bien $\tilde{V}_2$, selon que $v_{2,1} > 0$ ou que $v_{2,1} < 0$.

De même puisque $\left| \frac{v_{1,2}}{v_{2,2}} \right| < \varepsilon$ (lemme 1), le plan $x_2 = 0$ contient un seul

des points $\tilde{O}$, $\tilde{V}_1$, $\tilde{V}_2$ qui est $\tilde{O}$ ou $\tilde{V}_1$ selon que $v_{1,2} > 0$ ou que $v_{1,2} < 0$ [dans l'exemple construit dans la démonstration du lemme 3, on avait $w_{1,2} = w_{2,1} = 1$, autrement dit, $v_{1,2} = 4$, $v_{2,1} = 2$, donc le point $\tilde{P}$ situé sur $x_1 = 0$ et $x_2 = 0$ est $\tilde{O}$]. On doit donc examiner 4 cas distincts où la disposition mutuelle de $\tilde{\Delta}$ et $\hat{\Delta}$ serait comme suit.



On va discuter en détail le premier cas, ce qui suffit, car les discussions des autres cas en sont assez semblables. De plus, l'exemple de $\tilde{\Delta}$ construit dans la démonstration du lemme 3 conduit au premier cas.

Les sommets $\hat{B}_1$, $\hat{B}_2$, $\hat{B}_3 = \tilde{O}$ du triangle $\hat{\Delta}$ se trouvent sur les axes X_1 , X_2 , X_3 . Soit donc $\hat{B}_1 = (\hat{b}_1, 0, 0)$, $\hat{B}_2 = (0, \hat{b}_2, 0)$, $\hat{B}_3 = (0, 0, \hat{b}_3)$. Il est clair que $\hat{b}_3 = -v_{1,3}$ et que, si $x_3 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ est l'équation du plan de Δ , l'on a $\hat{b}_1 = -\hat{b}_3 \alpha_1^{-1} = \alpha_1^{-1} v_{1,3}$ et $\hat{b}_2 = -\alpha_2^{-1} \hat{b}_3 = \alpha_2^{-1} v_{1,3}$ [en effet, l'équation du plan de $\tilde{\Delta}$ est $x_3 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \hat{b}_3 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 - v_{1,3}$].

Or, on sait (remarque après le lemme 2) que

$$\left| \alpha_1 \frac{v_{1,1}}{v_{1,3}} - 1 \right| < 3\varepsilon \text{ et } \left| \alpha_2 \frac{v_{2,2}}{v_{1,3}} - 1 \right| < 4\varepsilon, \text{ ce qui entraîne } \left| \frac{v_{1,1}}{\hat{b}_1} - 1 \right| < 3\varepsilon \text{ et}$$

$$\left| \frac{v_{2,2}}{\hat{b}_2} - 1 \right| < 4\varepsilon, \text{ donc } \left| \frac{\hat{b}_1}{v_{1,1}} - 1 \right| < 5\varepsilon \text{ et } \left| \frac{\hat{b}_2}{v_{2,2}} - 1 \right| < 5\varepsilon.$$

Appliquons la translation T^{-1} à $\hat{\Delta}$ et $\tilde{\Delta}$. Alors, les sommets de $T^{-1} \cdot \hat{\Delta}$ sont $\hat{B}_1 - \hat{B}_3 = \hat{B}_1 - \tilde{o}$, $\hat{B}_2 - \tilde{o}$, $\tilde{o}$. Posons $\hat{B}_1 - \tilde{o} = \hat{\lambda}'_1 v_1 + \hat{\lambda}'_2 v_2$,

$\hat{B}_2 - \tilde{o} = \hat{\lambda}''_1 v_1 + \hat{\lambda}''_2 v_2$. Ces égalités ne changent pas si on remplace les points considérés par leurs projections, sur le plan $x_3 = 0$, qui sont, pour $\hat{B}_1 - \tilde{o}$, $\hat{B}_2 - \tilde{o}$, v_1 , v_2 , respectivement $(\hat{b}_1, 0)$, $(0, \hat{b}_2)$, $(v_{1,1}, v_{1,2})$, $(v_{2,1}, v_{2,2})$. On a donc

$$\begin{aligned} \hat{\lambda}'_1 v_{1,1} + \hat{\lambda}'_2 v_{2,1} &= \hat{b}_1 & \hat{\lambda}''_1 v_{1,1} + \hat{\lambda}''_2 v_{2,1} &= 0 \\ \hat{\lambda}'_1 v_{1,2} + \hat{\lambda}'_2 v_{2,2} &= 0 & \hat{\lambda}''_1 v_{1,2} + \hat{\lambda}''_2 v_{2,2} &= \hat{b}_2. \end{aligned}$$

$$\text{Si } v = \begin{vmatrix} v_{1,1} & v_{2,1} \\ v_{1,2} & v_{2,2} \end{vmatrix}, \text{ on a}$$

$v \hat{\lambda}'_1 = v_{2,2} \hat{b}_1$, $v \hat{\lambda}'_2 = -v_{1,2} \hat{b}_1$, $v \hat{\lambda}''_1 = -v_{2,1} \hat{b}_2$, $v \hat{\lambda}''_2 = v_{1,1} \hat{b}_2$. On sait

(remarque après le lemme 2) que $\left| \frac{v}{v_{1,1} v_{2,2}} - 1 \right| < \varepsilon^2$, d'autre part

$$\left| \frac{\hat{b}_1 v_{2,2}}{v_{1,1} v_{2,2}} - 1 \right| < 5\varepsilon, \quad \left| \frac{\hat{b}_1 v_{1,2}}{v_{1,1} v_{2,2}} \right| < \varepsilon + 5\varepsilon^2, \quad \left| \frac{-v_{2,1} \hat{b}_2}{v_{1,1} v_{2,2}} \right| < \varepsilon (1+5\varepsilon) \text{ et}$$

$$\left| \frac{v_{1,1} \hat{b}_2}{v_{1,1} v_{2,2}} - 1 \right| < 5\varepsilon.$$

Donc si ε est suffisamment petit, on a

$$\left| \hat{\lambda}'_1 - 1 \right| < 5\varepsilon, \quad \left| \hat{\lambda}'_2 \right| < 2\varepsilon, \quad \left| \hat{\lambda}''_1 \right| < 2\varepsilon, \quad \left| \hat{\lambda}''_2 - 1 \right| < 5\varepsilon.$$

Par conséquent, on a sûrement, si ε est assez petit, $\hat{\lambda}_1' > -\frac{1}{3}$,

$$\hat{\lambda}_2' > -\frac{1}{3}, \quad \hat{\lambda}_1' + \hat{\lambda}_2' < 1 + 8\varepsilon < \frac{4}{3} \quad \text{et} \quad \hat{\lambda}_1'' > -\frac{1}{3}, \quad \hat{\lambda}_2'' > -\frac{1}{3}, \quad \hat{\lambda}_1'' + \hat{\lambda}_2'' < \frac{4}{3}.$$

Ainsi les sommets $\hat{B}_1 - \hat{B}_3, \hat{B}_2 - \hat{B}_3$ de $T^{-1}.\hat{\Delta}$, ainsi que, évidemment son sommet $\tilde{o}$ appartiennent à l'intérieur de $\hat{\Delta}^*$, donc $\tilde{\Delta}$ est contenu dans l'intérieur de $T.\hat{\Delta}^* = \tilde{\Delta}^*$.

Corollaire. Les seuls points entiers de $\hat{\Delta}$ sont

$$\tilde{o}, \tilde{V}_1, \tilde{V}_2 \quad \text{et} \quad \tilde{u} = \left(\frac{V_1 + V_2}{3} \right)^{\sim}.$$

En effet, les points entiers de $\hat{\Delta}$ contenus à l'intérieur de $\tilde{\Delta}^*$ coïncident avec ceux de $\tilde{\Delta}$.

Lemme 5. Soit T_o une translation qui, ou bien applique l'un des points $\tilde{o}, \tilde{V}_1, \tilde{V}_2$ sur $\tilde{u}$, ou bien applique $\tilde{u}$ sur l'un des points $\tilde{o}, \tilde{V}_1, \tilde{V}_2$. Alors les trois autres points parmi $T_o.\tilde{o}, T_o.\tilde{V}_1, T_o.\tilde{V}_2$ et $T_o.\tilde{u}$ n'appartiennent pas à R_+^3 .

Supposons que $T_o.\tilde{o} = \tilde{u}$ ou que $T_o.\tilde{u} = \tilde{o}$ (les autres cas se démontrent de manière analogue). Alors la droite passant par $\tilde{o}$ et $\tilde{u}$ ayant la direction de T_o sépare les points $\tilde{V}_1$ et $\tilde{V}_2$. Donc T_o ne transforme aucun de ces points en l'autre, pas plus qu'en l'un des points $\tilde{o}, \tilde{u}$. Donc $T_o.\tilde{V}_1, T_o.\tilde{V}_2$ ne sont pas parmi les points $\tilde{o}, \tilde{V}_1, \tilde{V}_2, \tilde{u}$.

Si $T_o.\tilde{o} = \tilde{u}$, le point $T_o.\tilde{u}$ se trouve sur la droite passant par $\tilde{o}$ et $\tilde{u}$, mais ne peut être ni $\tilde{o}$ ni $\tilde{u}$, donc ne peut être aucun des points $\tilde{o}, \tilde{V}_1, \tilde{V}_2, \tilde{u}$.

Si $T_o.\tilde{u} = \tilde{o}$, on peut dire la même chose de $T_o.\tilde{o}$. Mais cela signifie que les transformés par T_o des 3 points indiqués plus haut sont en dehors de $\hat{\Delta}$, car $\tilde{o}, \tilde{V}_1, \tilde{V}_2$ et $\tilde{u}$ sont les seuls points entiers de $\hat{\Delta}$ (corollaire du lemme 4). Comme $\hat{\Delta}$ est le triangle intersection de $\mathcal{J}(\tilde{\Delta})$ avec R_+^3 , cela signifie que ces transformés ne sont pas dans R_+^3 .

Venons-en au contre-exemple annoncé :

Considérons le triangle $\tilde{\Delta}$ précédent avec ε assez petit pour que $\tilde{\Delta}$ satisfasse au lemme 4 et soit $x_3 = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + h$ l'équation du plan $H' = \mathcal{P}(\tilde{\Delta})$. Soit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$. Considérons d'autre part la partition suivante (V, W) de N^3 .

$$V = \left\{ P \in N^3 ; h_\alpha(P) < h \text{ ou } P = \tilde{u} = \left(\frac{V_1 + V_2}{3} \right)^\sim \right\},$$

$$W = \left\{ P \in N^3 ; h_\alpha(P) > h \text{ ou } P = \tilde{o}, \text{ ou } P = \tilde{V}_1, \text{ ou } P = \tilde{V}_2 \right\}.$$

Soit E l'ensemble des points limites de cette partition. On a

$E = \left\{ \tilde{o}, \tilde{V}_1, \tilde{V}_2, \tilde{u} = \tilde{u} + e_3 \right\} \cup E'$, où E' est un ensemble de points $P \in N^3$ tels que $h < h_\alpha(P) < h + 1$, comprenant tous les points de ce type qui sont au-dessus du plan $x_3 = 0$ et certains autres (qu'il est inutile de décrire) d'entre eux se trouvant sur ce plan. Il est clair que $h_\alpha(E) = h_\alpha(\tilde{u}) - h_\alpha(\tilde{o}) = (h+1) - h = 1$.

D'autre part, si $H'' = H' + e_3$, on a $H' \cap E = \{\tilde{o}, \tilde{V}_1, \tilde{V}_2\}$, $H'' \cap E = \{\tilde{u}\}$. Les

projections horizontales de ces ensembles étant

$$\overline{H' \cap E} = \left\{ \tilde{o} = \tilde{o}, \tilde{V}_1 = (v_{1,1}, v_{1,2}), \tilde{V}_2 = (v_{2,1}, v_{2,2}) \right\} \text{ et}$$

$$\overline{H'' \cap E} = \{\tilde{u}\} = \left\{ \frac{\tilde{V}_1 + \tilde{V}_2}{3} \right\}.$$

L'enveloppe convexe de $\overline{H' \cap E}$ est évidemment la projection horizontale $\tilde{\Delta}$ du triangle $\tilde{\Delta}$, tandis que $\overline{H'' \cap E}$ se réduit au seul point $\tilde{u}$. Mais comme $\tilde{u} \in \tilde{\Delta}$ on a $\tilde{u} \in \tilde{\Delta}$ et $\{\tilde{u}\} \subset \tilde{\Delta}$, ce qui prouvera, d'après le lemme suivant, que $\alpha \in \mu(E)$. Ainsi $\text{Ep}(E) = 1$.

Lemme 5. Soient E un ensemble fini de R^S , $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{s-1}) \in R^{S-1}$, H'_α , H''_α les hyperplans α -tangents inférieur et supérieur à E , $\mathcal{P}'_\alpha(E)$, $\mathcal{P}''_\alpha(E)$ les enveloppes convexes de $H'_\alpha \cap E$, $H''_\alpha \cap E$ respectivement. Alors si les projections horizontales

$\overline{\mathcal{P}'_\alpha(E)}$ et $\overline{\mathcal{P}''_\alpha(E)}$ de $\mathcal{P}'_\alpha(E)$ et $\mathcal{P}''_\alpha(E)$ ne sont pas disjointes, on a $\alpha \in \mu(E)$.

Comme $\mathcal{P}'_{\alpha}(E) \cap \mathcal{P}''_{\alpha}(E) \neq \emptyset$, il existe une droite verticale D [à savoir une telle droite passant par un point commun à $\overline{\mathcal{P}'_{\alpha}(E)}$ et $\overline{\mathcal{P}''_{\alpha}(E)}$] qui coupe à la fois $\mathcal{P}'_{\alpha}(E)$ et $\mathcal{P}''_{\alpha}(E)$. Soient P' et P'' les points d'intersection de D avec $\mathcal{P}'_{\alpha}(E)$ et $\mathcal{P}''_{\alpha}(E)$ respectivement, et soient p'_s et p''_s les s -ièmes coordonnées de P' et P'' respectivement. Il est clair que $Ep_{\alpha}(E) = p''_s - p'_s$.

Soit $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{s-1})$ un autre élément de R^{s-1} , et soient H'_{β} , H''_{β} les hyperplans β -tangents inférieur et supérieur à E . Comme tous les points de E , donc en particulier ceux de $H''_{\alpha} \cap E$, sont au-dessous ou sur H''_{β} , tout point de $\mathcal{P}''_{\alpha} \cap E$ et, en particulier P'' , se trouve au-dessous ou sur H''_{β} . Par conséquent H''_{β} coupe D en un point Q'' dont la s -ième composante q''_s est telle que $q''_s \geq p''_s$. Pour des raisons analogues aux précédentes, D coupe H'_{α} en un point Q' , dont la s -ième composante q'_s est telle que $q'_s \leq p'_s$. On a donc $Ep_{\beta}(E) = q''_s - q'_s \geq p''_s - p'_s = Ep_{\alpha}(E)$. Ce qui prouve que $Ep_{\alpha}(E) = \inf_{\beta \in R^{s-1}} Ep_{\beta}(E) = Ep(E)$, autrement dit $\alpha \in \mu(E)$.

Montrons maintenant que E est de préévaluation.

Soit $T = (t_1, t_2, t_3) \in Z^3$, si $P \in N^3$, on a $h_{\alpha}(T.P) = h_{\alpha}(T) + h_{\alpha}(P)$. Si $h_{\alpha}(T) > 0$ et si $P \in W = \text{ext } E$ (donc $h_{\alpha}(P) \geq h$), on a $h_{\alpha}(T.P) > h$. Par suite, si $T.P \in N^3$, on a $T.P \in W$, donc $T.\text{ext } E \cap N^S \subseteq \text{ext } E$. Si $h_{\alpha}(T) < 0$ et si $P \in V = \text{int } E$ (donc $h_{\alpha}(P) \leq h$), on a $h_{\alpha}(T.P) < h$, ce qui entraîne, comme plus haut, $T.\text{int } E \cap N^S \subseteq \text{int } E$.

Supposons que $h_{\alpha}(T) = 0$. Alors on a, pour tout $P \in N^S$, $h_{\alpha}(T.P) = h_{\alpha}(P)$. Donc si $h_{\alpha}(P) > h$ (resp. $h_{\alpha}(P) < h$), donc $P \in \text{ext } E$ (resp. $\text{int } E$), on a la même inégalité pour $h_{\alpha}(T.P)$. Par conséquent, si $T.P \in N^S$, on aura $T.P \in \text{ext } E$ (resp. $\text{int } E$).

Supposons que l'on n'a pas $T.\text{ext } E \cap N^S \subseteq \text{ext } E$. Alors il existe un point $P \in W$ tel que $T.P \in V$. En vertu de ce qui précède, on doit avoir $h_{\alpha}(P) = h$,

donc P est un des points $\tilde{O}, \tilde{V}_1, \tilde{V}_2$ de $H' \cap W$. De même, on doit avoir $h_\alpha(T.P) = h$, donc $T.P$ est l'unique point $\tilde{u}$ de $H' \cap V$. Ainsi T applique un des points $\tilde{O}, \tilde{V}_1, \tilde{V}_2$ sur $\tilde{u}$. Mais, en vertu du lemme 5, on a $T\tilde{u} \notin N^3$, il en résulte $T.\text{int } E \cap N^S = T.\{\text{int } E \cap (H' \cap V)\} \cap N^S \subseteq \text{int}.E$. Ainsi les translatées entières de E ne se traversent pas, donc E est de préévaluation.

(9.4) COMPLEMENTS SUR LES SOUS-ENSEMBLES DE TYPE ML DE PREVALUATION DANS $Z^s \subseteq R^s$ ($s \geq 3$)

Dans toute la suite s désigne, sauf mention expresse du contraire, un entier ≥ 3 . Un sous-ensemble $E \subseteq N^s$ de type ML de préévaluation est dit singulier si $Ep(E) \geq 1$. Il sera dit faiblement singulier si $Ep(E) = 1$ et fortement singulier si $Ep(E) > 1$. L'existence de sous-ensembles de type ML fortement singuliers reste un problème ouvert [on l'a déjà signalé dans (9.3)]. Mais, en tenant compte de (9.3), on prouvera l'existence de sous-ensembles de type ML de préévaluation faiblement singuliers, pour tout $s \geq 3$.

(9.4.1) Soit Δ un hypertétraèdre quelconque de R^s (autrement dit l'enveloppe convexe fermée de $s+1$ points, qui ne sont contenus dans aucun hyperplan de R^s) ou d'une variété linéaire quelconque V de dimension s comportant un réseau ρ de points entiers $\subseteq Z^s$, et soit (V, W) une partition arbitraire de $\Delta \cap Z^s$ (ou de $\Delta \cap \rho$). On dit que (V, W) est une partition singulière de préévaluation si elle satisfait aux conditions suivantes.

1°) Il n'existe aucun quadruple de points $P, P' \in V, Q, Q' \in W$ tel qu'il existe une translation (forcément entière) T telle que $T.P = Q, T.Q' = P'$,

2°) Les enveloppes convexes de V et de W ne sont pas disjointes.

Remarque: Si $E \subseteq N^s$ est un ensemble de type ML tel que $Ep(E) < 1$ et si Δ est un hypertétraèdre de sommets $\bar{O}, P_1, P_2, \dots, P_s$, où P_i est un point de l'axe X_i , ($V = \text{int.} E \cap \Delta, W = \text{ext.} E \cap \Delta$) satisfait évidemment à la condition 1° précédente mais pas à la condition 2°, car les enveloppes convexes de $\text{int.} E$ et de $\text{ext.} E$ sont, comme on le voit facilement, disjointes. Par contre, en conservant les données et les notations de (9.3), la partition $(V = \{ \tilde{u} \}, W = \{ \tilde{O}, \tilde{V}_1, \tilde{V}_2 \})$ de $\hat{\Delta}$ est une partition singulière de préévaluation.

(9.4.2) Soit E un ensemble de type ML de $N^s \subseteq R^s$. $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1})$ étant un point rationnel de R^{s-1} tel que $0 > \alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_{s-1} \geq -1$, soient H'_α l'hyperplan

α -tangent inférieur de E , $h'_\alpha = h(H'_\alpha)$ et $\hat{\Delta}_\alpha$ l'hypertétraèdre (de dimension $s-1$) découpé dans H'_α par R_+^s .

Théorème E est un ensemble de préévaluation faiblement singulier si, et seulement si il existe un $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}) \in R^{s-1}$ rationnel choisi comme précédemment tel que :

1°) Pour tout $P \in N^s$, on a $h'_\alpha(P) < h'_\alpha \Rightarrow P \in \text{int.} E$ et $P \in \text{int.} E \Rightarrow h'_\alpha(P) \leq h'_\alpha$

2°) $(W = H'_\alpha \cap \text{int.} E, V = H'_\alpha \cap \text{ext.} E)$ est une partition singulière de préévaluation des points de $\hat{\Delta}_\alpha$.

Montrons d'abord que s'il existe $\alpha \in R^{s-1}$ vérifiant les conditions du théorème on a $\alpha \in \mu(E)$. En effet d'après 1°, on a $Ep_\alpha(E) = 1$ et $H'_\alpha \cap E = H'_\alpha \cap \text{ext.} E$. L'hyperplan α -tangent supérieur H''_α à E est, de façon évidente, $H'_\alpha + e_s$, de plus $H''_\alpha \cap E = \{P + e_s; P \in H'_\alpha \cap \text{int.} E\}$. Donc les projections horizontales de $H'_\alpha \cap E$ et de $H''_\alpha \cap W$ coïncident avec celles de W et V respectivement, par conséquent leurs enveloppes convexes coïncident aussi avec celles de W et V respectivement. Comme, d'après 2° dans (2.4.1), ces dernières enveloppes convexes se coupent, il en est de même des projections horizontales de $H'_\alpha \cap E$ et $H''_\alpha \cap E$. Ainsi $\alpha \in \mu(E)$ [(9.3) Lemme 6]. Il en résulte, en particulier, que $Ep(E) = 1$.

Il suffit maintenant d'appliquer le même raisonnement que dans le contre-exemple pour voir que E est de préévaluation.

Supposons inversement que E est de préévaluation et que $Ep(E) = 1$. Alors si $\alpha \in \mu(E)$ est rationnel [par exemple, s'il est un des sommets de $\mu(E)$] il satisfait, de façon évidente aux conditions 1° et 2° du théorème.

(9.4.2) Lemme Soit $E \subseteq N^s$ un ensemble de type ML de préévaluation singulier [$Ep(E) \geq 1$] et soit Δ un hypertétraèdre de R^s dont les sommets sont 0 et des points positifs P_i situés sur les axes de coordonnées X_i tels que $\text{int.} E \subseteq \Delta$ et $E \subseteq \Delta$.

Alors $(\text{int.}E, \text{ext.}E \cap \Delta)$ est une partition singulière de prévaluation des points entiers de Δ .

La partition considérée satisfait certainement à la condition 1° de (9.4.1); car la "surpartition" $(\text{int.}E, \text{ext.}E)$ y satisfait. Supposons qu'elle ne satisfasse pas à la condition 2° de (9.4.1). Alors il existe un hyperplan, qui sépare $\text{int.}E$ et E donc $\text{int.}E$ et $\text{ext.}E$, ce qui implique, en vertu de (5.4.2), $E_p(E) < 1$, donc la régularité de E .

Théorème pour tout $s \geq 3$ il existe un sous-ensemble $E \subseteq \mathbb{N}^s$ de type ML de prévaluation faiblement singulier.

D'après (9.3) le théorème est vrai pour $s = 3$. Supposons qu'il soit vrai pour $s-1 \geq 3$ et montrons qu'il est aussi vrai pour s .

Soit H un hyperplan d'équation

$$x_s = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_{s-1} x_{s-1} + h$$

où $0 > \alpha_1 \geq \dots \geq \alpha_{s-1} \geq -1$ et $\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}$ sont des fractions rationnelles données dont les dénominateurs sont premiers entre eux deux à deux, tandis que $h > 0$ est un entier à choisir. Soit, pour tout $i = 1, 2, \dots, s-1$, $\alpha_i = \frac{-l_i}{d_i}$ ($d_i, l_i > 0$) la représentation irréductible de α_i (avec le dénominateur positif). Montrons que $P = (x_1, \dots, x_s) \in H$ est un entier si et seulement si pour tout $i = 1, 2, \dots, s-1$, x_i est un entier $\equiv 0 \pmod{d_i}$.

En effet, $\alpha_i x_i = \frac{-l_i x_i}{d_i}$ doit, pour $P \in H$, être égal à $x_s - h = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{s-1} \alpha_j x_j$,

qui est une fraction de dénominateur $d_1 \dots d_{i-1} d_{i+1} \dots d_{s-1}$ premier à d_i .

Ces deux fractions ne peuvent être égales que si elles sont, en fait, toutes les deux des entiers, ce qui implique $x_i \equiv 0 \pmod{d_i}$ et cette congruence doit avoir lieu pour tout $i = 1, 2, \dots, s-1$.

Inversement, puisque $\tilde{0} = (0, \dots, 0, h)$ et les $\tilde{V}_1 = (0, \dots, 0, x_1 = d_1, 0, \dots, x_s = h - 1, 1)$ sont des points entiers de H , l'ensemble des points entiers de H est $\tilde{0} + \mathbb{Z}(\tilde{V}_1 - \tilde{0}) + \dots + \mathbb{Z}(\tilde{V}_{s-1} - \tilde{0})$. Ainsi, si $\bar{P} = (x_1, \dots, x_{s-1}) \in \mathbb{Z}^{s-1}$ est tel que, pour tout $i = 1, \dots, s-1$, $x_i \equiv 0 \pmod{d_i}$, $\tilde{0} + \frac{x_1}{d_1}(\tilde{V}_1 - \tilde{0}) + \dots + \frac{x_{s-1}}{d_{s-1}}(\tilde{V}_{s-1} - \tilde{0})$ est un point de H dont la projection horizontale est $\bar{P} = (x_1, \dots, x_{s-1})$ considéré.

Considérons la transformation linéaire L :

$(x_1, \dots, x_{s-1}, x_s) \longrightarrow \left(\frac{x_1}{d_1}, \frac{x_2}{d_2}, \dots, \frac{x_{s-1}}{d_{s-1}} \right)$ de H dans $\mathbb{R}^{s-1}$. Il est clair que L est une bijection qui applique l'ensemble des points entiers de H sur celui de $\mathbb{Z}^{s-1}$ des points entiers de $\mathbb{R}^{s-1}$ de manière que $\tilde{0}$ vienne sur $\hat{0}$ et $\tilde{V}_i$ vienne sur e_i . Soit $\hat{\Delta}$ l'hypertétraèdre découpé sur H par R_+^s . Il est clair que $\hat{\Delta}$ est l'ensemble des points $P = (x_1, \dots, x_s)$ de H tels que $x_1 \geq 0, \dots, x_{s-1} \geq 0$, $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{s-1} x_{s-1} + h \leq 0$. Or, $\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_{s-1} x_{s-1} + h = -\left(l_1 \frac{x_1}{d_1} + \dots + l_{s-1} \frac{x_{s-1}}{d_{s-1}} - h \right)$, de sorte que l'image $L.\hat{\Delta}$ de $\hat{\Delta}$ par L est

l'hypertétraèdre $\bar{\Delta} = \{ \bar{P} = (x_1, \dots, x_{s-1}) ; x_1 \geq 0, \dots, x_{s-1} \geq 0, l_1 x_1 + \dots + l_{s-1} x_{s-1} \leq h \}$ de $\mathbb{R}^{s-1}$ obtenu en interceptant R_+^{s-1} par l'hyperplan d'équation $l_1 x_1 + \dots + l_{s-1} x_{s-1} = h$ de $\mathbb{R}^{s-1}$ passant par les points

$Q_i = (0, \dots, 0, x_i = \frac{h}{l_i}, 0, \dots, 0)$ des axes X_i ($i = 1, 2, \dots, s-1$). Cela étant,

en vertu de l'hypothèse d'induction, il existe un ensemble $\bar{E} \subseteq \mathbb{N}^{s-1}$ de type ML de prévaluation faiblement singulier. Les $\alpha_1, \dots, \alpha_{s-1}$, donc aussi les entiers

$l_1, \dots, l_{s-1}$ étant donnés, il est clair que si h est suffisamment grand, $\bar{\Delta}$ contient $\text{int.}\bar{E} \cup \bar{E}$. Donc si h est choisi de manière que $\text{int.}\bar{E} \cup \bar{E} \subseteq \bar{\Delta}$, ce que l'on suppose dans la suite, $(\bar{V} = \text{int.}\bar{E}, \bar{W} = \bar{\Delta} \cap \text{ext.}\bar{E})$ est une partition de prévaluation faiblement singulière des points entiers de $\bar{\Delta}$. Dès lors, si (V, W) est l'image de $(\bar{V}, \bar{W})$ par L^{-1} , (V, W) est une partition de prévaluation faiblement singulière des points entiers de $\hat{\Delta}$.

Donc, en vertu du théorème dans (2.4.2), l'ensemble des points limites de la partition $(\{ P \in \mathbb{N}^S; h_\alpha(P) < h \text{ ou } P \in V \}, \{ P \in \mathbb{N}^S; h_\alpha(P) > h \text{ ou } P \in W \})$ est un ensemble de type ML de préévaluation faiblement singulier de $\mathbb{N}^S$.

Remarque On peut montrer qu'en choisissant convenablement l'hyperplan H , on peut "mettre en sandwich", à un isomorphisme près, n'importe quelle partition de préévaluation singulière (V, W) des points entiers de n'importe quel hypertétraèdre Δ de $\mathbb{R}^{S-1}$ pour obtenir un ensemble de type ML de préévaluation et faiblement singulier de $\mathbb{N}^S$.

(2.4.4) Quelques propriétés des partitions de préévaluation singulières

Les partitions de préévaluation singulières (V, W) des points entiers d'un hypertétraèdre Δ ont les propriétés suivantes.

1. Si $P, P' \in V$ (resp. W), tout point entier du segment PP' appartient à V (resp. W)

En effet, supposons, par exemple que $P, P' \in V$ et qu'il existe des points entiers du segment PP' qui appartiennent à W (si $P, P' \in W$ la démonstration est la même en échangeant les rôles de V et W).

Le segment PP' étant orienté de P vers P' , soient Q le premier et Q' le dernier des points entiers de PP' qui appartiennent à W (donc $Q \neq P$, $Q' \neq P'$, mais il n'est pas exclu que $Q = Q'$). Soit Q° le point entier de PP' , qui précède immédiatement Q (Q° existe, car $P \neq Q$; il n'est pas exclu que $Q^\circ = P$) et soit $Q^{\circ'}$ le point entier de PP' , qui suit immédiatement Q' ($Q^{\circ'}$ existe, car $Q' \neq P'$; il n'est pas exclu que $Q^{\circ'} = P'$). Par construction, on a $Q^\circ, Q^{\circ'} \in V$. Soit T la translation telle que $T.Q^\circ = Q$. Elle applique tout point entier de PP' autre que P' sur son successeur. On a donc, en particulier $TQ' = Q^{\circ'}$. Mais comme $Q^\circ, Q^{\circ'} \in V$ et $Q, Q' \in W$, cela contredit le fait que (V, W) est de préévaluation.

Soit $\vec{D}$ une droite orientée sur laquelle se trouvent au moins deux points entiers de Δ . Alors, d'après la propriété 1, seuls 4 cas incompatibles sont possibles.

- a) tous les points entiers de $\Delta \cap \vec{D}$ appartiennent à V.
- b) tous les points entiers de $\Delta \cap \vec{D}$ appartiennent à W
- c) $\vec{D} \cap V \neq \emptyset$, $\vec{D} \cap W \neq \emptyset$ et tout point de $\vec{D} \cap V$ précède tout point de $\vec{D} \cap W$.
- d) $\vec{D} \cap V \neq \emptyset$, $\vec{D} \cap W \neq \emptyset$ et tout point de $\vec{D} \cap W$ précède tout point de $\vec{D} \cap V$.

On dira que $\vec{D}$ est (V, W) positive dans le cas c) qu'elle est (V, W) négative dans le cas d) et (V, W) neutre dans les cas a) et b). Cela étant on a aussi les propriétés suivantes.

2. Il ne peut exister aucun couple $\vec{D}, \vec{D}'$ de droites parallèles orientées dans le même sens, chacune contenant au moins deux points de Δ , dont l'une (par exemple $\vec{D}$) est (V, W)-positive et l'autre (V, W)-négative

En effet supposons que $\vec{D}$ soit (V, W)-positive et que $\vec{D}'$ soit (V, W)-négative. Alors, parmi les points entiers de $\vec{D}$ qui appartiennent à V, il existe un dernier noté P, et ce point n'est pas le dernier point entier de $\vec{D} \cap \Delta$. De même parmi les points entiers de $\vec{D}'$ qui appartiennent à W il existe un dernier noté P', lequel n'est pas le dernier point entier de $\vec{D}' \cap \Delta$. Il existe donc sur $\vec{D}, \vec{D}'$ les successeurs immédiats Q, Q' des points respectifs P, P', et on a $P \in V, Q \in W, P' \in W, Q' \in V$. Or si T est la translation telle que $T.P = Q$, on aura aussi $T.P' = Q'$, ce qui contredit le fait que (V, W) soit de préévaluation.

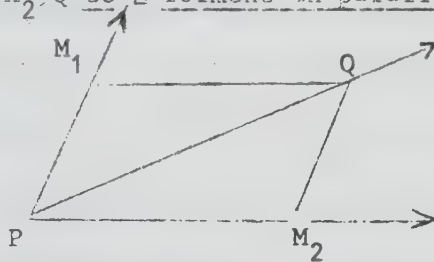
Etant donnée une direction*) quelconque de R^S , considérons toutes les droites de cette direction passant par un point entier quelconque de Δ . On dira que cette direction est (V, W)-neutre si toute droite orientée de cette direction*), sur laquelle se trouvent au moins deux points entiers de Δ , est (V, W)-neutre [c'est, en particulier, le cas si toute droite de cette direction contient au plus un point entier de Δ].

*) On appelle directions de R^S les classes de l'équivalence $\parallel$ de l'ensemble des droites orientées de R^S telles que $\vec{D} \parallel \vec{D}'$ signifie que $\vec{D}$ et $\vec{D}'$ sont parallèles et orientées dans le même sens.

On dira que cette direction est (V,W) -positive [resp. (V,W) -négative] s'il existe au moins une droite orientée $\vec{D}$ de la direction considérée, contenant au moins deux points entiers de Δ et qui soit (V,W) -positive [resp. (V,W) -négative].

Remarque Par définition, une direction ne peut être à la fois (V,W) -neutre et d'autre part, (V,W) -positive ou (V,W) -négative. En vertu de la propriété 2, elle ne peut pas être à la fois (V,W) -positive et (V,W) -négative. Ainsi, il s'agit d'une partition des directions de $\mathbb{R}^S$ en 3 catégories et deux directions opposées sont ou bien toutes les deux (V,W) -neutres ou bien l'une est (V,W) -positive et l'autre (V,W) -négative.

3. Si 4 points entiers P, M_1, M_2, Q de Δ forment un parallélogramme comme indiqué sur le dessin (autrement dit



$M_1 - P = Q - M_2$) et si $P \in V, M_1 \in W, M_2 \in W$, donc les directions $\vec{PM}_1$ et $\vec{PM}_2$ sont (V,W) -positives, la direction intermédiaire $\vec{PQ}$ l'est aussi

En effet, la direction $\vec{PQ}$ est (V,W) -positive si et seulement si $Q \in W$.

Mais si Q appartenait à V , la translation T de vecteur $M_1 - P = Q - M_2$ amènerait $P \in V$ sur $M_1 \in W$ et $M_2 \in W$ sur $Q \in V$, ce qui contredirait le fait que (V,W) est de prévaluation.

Si l'on se place du point de vue "entier", en ne considérant que Z^S uniquement et en oubliant le reste de $\mathbb{R}^S$, les propriétés 1), 2) et 3) peuvent se formuler comme suit :

a) V et W sont des ensembles "intégralement convexes" disjoints (un ensemble C de Z^S étant dit intégralement convexe si tout point de Z^S se trouvant sur un segment dont les extrémités appartiennent à C appartient aussi à C).

b) Toute direction est (V, W) neutre ou (V, W) -positive ou (V, W) -négative. De plus une direction "intégralement intermédiaire" entre deux directions (V, W) -positives [resp. (V, W) -négatives] est (V, W) -positive [resp. (V, W) -négative]. (une direction $\vec{d}$ est dite intégralement intermédiaire entre deux directions (V, W) -positives ou (V, W) -négatives $\vec{d}_1, \vec{d}_2$ s'il existe des points P, Q_1, Q_2, Q de $V \cup W$ formant un parallélogramme ($Q_1 - P = Q - Q_2$) tels que $P \in V, Q_1 \in W, Q_2 \in W$, (resp. $P \in W, Q_1 \in V, Q_2 \in V$) et que $\vec{d}_1, \vec{d}_2, \vec{d}$ coïncident avec les directions des droites orientées respectives PQ_1, PQ_2, PQ).

On est tenté d'essayer de passer de la convexité intégrale à la convexité tout court, ainsi que des directions intégralement intermédiaires aux directions intermédiaires quelconques, autrement dit de montrer que les enveloppes convexes de V et W sont disjointes et que (V, W) n'est pas autre chose que la partition des points entiers de Δ entre les supports de deux demi drapeaux supplémentaires de R^S , ce qui revient à montrer que (V, W) n'est pas singulière.

Si (V, W) était une partition de préévaluation [c'est-à-dire satisfaisant seulement à 1° de (3.4.1)] de Z^S tout entier, tel aurait été le cas, comme on l'a déjà vu, et cela tient avant tout (mais pas uniquement) à ce que, dans ce cas, une direction rationnelle intermédiaire est effectivement intégralement intermédiaire.

On peut aussi formuler la raison de ce qui se passe dans ce cas sous forme un peu plus vague, mais peut être moins particulière : Si l'on suppose que (V, W) est une partition de préévaluation de H^S et si on la suppose singulière (les enveloppes convexes de V et W se coupent) on arrive à produire un "quadruple irrégulier" $P, P' \in V, Q, Q' \in W$ tel que $Q - P = P' - Q'$. D'une manière plus précise, les circonstances de la situation permettent, aussi bien dans le cas, où (V, W) est une partition de préévaluation de Z^C que de celle des points entiers d'un hyper-tétraèdre Δ de R^S , de choisir dans $V \cup W$ trois des points considérés plus haut,

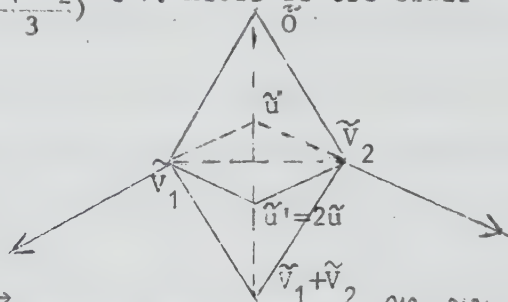
par exemple $P \in V, Q, Q' \in W$ (ou un choix analogue en échangeant V et W) de telle manière que T étant la translation de vecteur $Q-P$, on soit certain que $P' = TQ'$ appartient à W pourvu qu'il appartienne à l'ensemble considéré $V \cup W$ de points entiers. Dans le cas où $V \cup W = \mathbb{Z}^s$ il y appartient toujours car aucune translation entière ne fait sortir de $\mathbb{Z}^s$ aucun des points de $\mathbb{Z}^s$. Par contre, puisque pour tout $s \geq 3$ il existe des partitions de préévaluation singulières des points entiers d'hypertétraèdres convenables Δ de $\mathbb{R}^s$, tout triplet P, Q, Q' (ou Q, P, P' si l'on échange les rôles de V et W) susceptible à priori de se prolonger en quadruple irrégulier doit être tel que la translation "cruciale" de vecteur $Q-P$ (resp. $P-Q$) fasse sortir le point "crucial" Q' (resp. P') de Δ .

On peut conjecturer que cet état de choses a comme origine le fait que Δ qui a un volume fini ne contient qu'un ensemble fini de points entiers. Il se peut que tel soit le cas, grosso modo, pour $s = 2$. On peut même se demander si pour $s = 2$, il n'existe pas d'entier C tel que toute partition de préévaluation de l'ensemble des points entiers d'un triangle Δ ne soit pas singulière si le nombre de ses points est $> C$. Mais c'est certainement faux pour tout $s \geq 3$, car il existe alors des ensembles E de type ML de préévaluation dans $\mathbb{N}^s$ qui sont singuliers, donc $(\text{int}.E, \text{ext}.E)$ est une partition de préévaluation singulière de $\mathbb{N}^s$ qui contient une infinité de points entiers.

Si (V, W) est une partition de préévaluation singulière d'un hypertétraèdre Δ de $\mathbb{R}^s$, les enveloppes convexes de V, W se coupent, d'après la définition de la singularité. Montrons qu'une direction intermédiaire entre deux directions (V, W) -positives peut être, pour certaines de ces partitions, (V, W) -négative.

Considérons pour cela le triangle $\hat{\Delta}$ du contre-exemple (9.3) et posons

$\tilde{0}, \tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \in W$ $\tilde{u} = (\frac{v_1 + v_2}{3})^{\sim} \in V$. Alors il est clair



les directions $\vec{d}_1, \vec{d}_2$ des droites orientées $\tilde{u}\tilde{v}_1, \tilde{u}\tilde{v}_2$ sont (V, W) -positives tandis que celle $\vec{d}$ de la droite orientée $\tilde{0}\tilde{u}$, qui est intermédiaire, de façon évidente, entre $\vec{d}_1$ et $\vec{d}_2$ est (V, W) -négative.

Notons que si l'on agrandissait $\hat{\Delta}$ de manière à inclure d'autres points entiers, très vite on ne pourrait pas prolonger (V, W) précédente en une partition de préévaluation du triangle agrandi. Par exemple si $\hat{\Delta}' \supset \hat{\Delta}$ est tel que le

symétrique $\tilde{u}' = (\frac{2v_1 + 2v_2}{3})^{\sim} = 2\tilde{u}$ de $\tilde{u}$ par rapport au milieu de $\tilde{v}_1 \tilde{v}_2$ est un

point de $\hat{\Delta}'$ et si (V', W') est une partition de préévaluation des points entiers

de $\hat{\Delta}'$ telle que $V' \cap \hat{\Delta} = V$, $W' \cap \hat{\Delta} = W$, on doit avoir $\tilde{u}' \in V$ en vertu de la

propriété 1 appliquée au triplet de points alignés successifs $\tilde{0} \in W \subseteq W'$,

$\tilde{u} \in V \subseteq V'$ $\tilde{u}'$. Mais alors $\tilde{u}, \tilde{u}' \in V'$ et $\tilde{v}_1, \tilde{v}_2 \in W \subseteq W'$ fournit un quadruple

irrégulier [on peut aussi remarquer que la direction $\vec{d}'$ de la droite orientée

$\tilde{u}\tilde{u}'$ qui est déjà (V, W) -négative, donc (V', W') -négative est dans $\hat{\Delta}'$, intégralement

intermédiaire entre $\vec{d}_1, \vec{d}_2$ qui sont (V, W) positives donc aussi (V', W') -positives ;

elle doit donc être, en vertu de la propriété 3, (V', W') positive, ce qui est

absurde].

On peut se demander si cette situation a lieu seulement pour quelques hypertetraèdres particuliers. Il se trouve qu'il n'en est rien et qu'il s'agit d'un phénomène très général. On a en effet, le théorème suivant, dont la démonstration détaillée est réservée à une publication ultérieure (commune avec M. M. Krasner).

Théorème Soit (V, W) une partition de préévaluation singulière des points entiers d'un hypertétraèdre $\Delta \subseteq \mathbb{R}^s$ ($s \geq 2$), et soit B le barycentre de Δ . Alors il existe une constante finie $C_{V, W} > 1$ [dépendant du choix de (V, W)] telle que (V, W) ne puisse être prolongée en une partition de préévaluation des points entiers de l'image homothétique Δ' de Δ par l'homothétie de centre B et de rapport $C_{V, W}$.

Quelques indications sur la démonstration de ce théorème

Si E est un ensemble de type ML de préévaluation dans $\mathbb{N}^s$ et si Δ est l'hypertétraèdre obtenu en interceptant $\mathbb{R}^s$ par un hyperplan coupant les axes aux points d'ordonnée positive et tel que $\text{int.} E \cup E \subseteq \Delta$, on peut montrer, en étudiant en détail la notion d'ordre séparateur, qu'il existe une constante $C = C_{V, W} > 1$ telle que si $(V = \text{int.} E, W = \text{ext.} E \cap \Delta)$ peut être prolongée de la manière indiquée, E est l'ensemble de type ML associé à un anneau nilmonique préévaluable possédant des ordres séparateurs, ce qui implique la régularité de $(\text{int.} E, \text{ext.} E)$ et, par suite, de (V, W) . Ainsi, si (V, W) est une partition singulière, elle n'est pas prolongeable dans Δ' . Le cas des partitions de préévaluation singulières des hypertétraèdres de $\mathbb{R}^s$ se réduit au cas des ensembles ML de préévaluation singuliers de $\mathbb{R}^{s+1}$ grâce à la "méthode de sandwich" mentionnée plus haut.

Remarque Il n'y a pas besoin de prendre, dans l'énoncé précédent, l'homothétique de Δ juste par rapport à son barycentre, car tout point intérieur de Δ peut également jouer le rôle de ce centre d'homothétie. Seulement, le rapport d'homothétie $C_{V, W}$ nécessaire pour la validité du théorème peut varier avec le choix de ce point.

En effet, si A et B sont deux points intérieurs de Δ , un homothétique de Δ par rapport à A est contenu dans un homothétique de Δ par rapport à B de rapport d'homothétie suffisamment grand.

Par contre, le théorème peut se trouver en défaut si l'on remplace le barycentre B par certains points frontière de Δ . Ainsi si Δ est l'hypertétraèdre dont il s'agit plus haut, tout homothétique Δ' de Δ de rapport d'homothétie > 1 par rapport au point $\hat{O}$ comporte la partition singulière de préévaluation $(\text{int.}E, \text{ext.}E \cap \Delta')$ de ses points entiers prolongeant la partition singulière de préévaluation $(\text{int.}E, \text{ext.}E \cap \Delta)$ des points entiers de Δ .

BIBLIOGRAPHIE

- N. BOURBAKI
- Algèbre, ch. 2. Hermann - Paris
 - Espaces vectoriels topologiques, ch. 1 et 2. Hermann - Paris.
- J.W. CASSELS
- An introduction to the geometry of numbers
Springer-Verlag - Berlin 1959.
 - An introduction to diophantine approximation
Cambridge University press 1957.
- B.J. COFFI-KNETSIA
- Valuation des anneaux avec diviseurs de zéro au moyen de demi-groupes totalement ordonnés.
Propriétés des anneaux valuables et critère de valuabilité. C.R. Acad. Sc. t. 254, p. 2503-2738.
 - Une notion de valuation des anneaux avec diviseurs de zéro. Journées arithmétiques de Grenoble. Mai 1967.
- KHION Ya. V.
- Izvest. Akad. nauk S.S.S.R., 1957, t. 21, p. 311-328.
- M. KRASNER
- Introduction à la théorie des valuations.
Cours fait à la Faculté des Sciences de Paris 1955-1966.
Secrétariat de Mathématiques.
- M. SAMUEL
- Théorie algébrique des nombres - Hermann. Paris 1967.
- O. ZARISKI and P. SAMUEL
- Commutative algebra - Volumes 1 et 2
D. Van Norstrand Company, inc London. 1960.

UNIVERSITÉ DE PARIS

FACULTÉ DES SCIENCES
DE PARIS

8, QUAI SAINT BERNARD - PARIS V

SERVICE DE LA SCOLARITÉ

Bureau des Enseignements du 3^e Cycle

TÉLÉPHONE : 336-25-25 - P

PERMIS D'IMPRIMER

DOCTORAT : D'ÉTAT

THESE DE : ES - SCIENCES MATHÉMATIQUES.

Nom : COFFI - KNESTZIA

Prénoms : Barben, Jean

Né (e) le 27 NOVEMBRE 1970 à DOUALA Dép^t CAMEROUN

SUJETS

1^{ère} THESE : " Valuations des anneaux à l'aide des demi-groupes
totalement ordonnés avec zéro. "

2^e THESE (Propositions faites par la Faculté) :

C*-algèbres.



Vu et permis d'imprimer

Paris, le

Le Recteur de l'Académie
de Paris

Vu et approuvé

Paris, le 11 DECEMBRE 1970

Le Doyen de la Faculté
des Sciences de Paris

DEUXIÈME THÈSE

Propositions données par la Faculté

" C³ - ALGÈBRES ".

Vu et approuvé

Paris, le .11. DECEMBRE..... 1970.

Le Doyen de la Faculté des Sciences
de Paris

L. GAUTHIER

Vu
et permis d'imprimer

Le Recteur de l'Académie de Paris

R. MALLET

